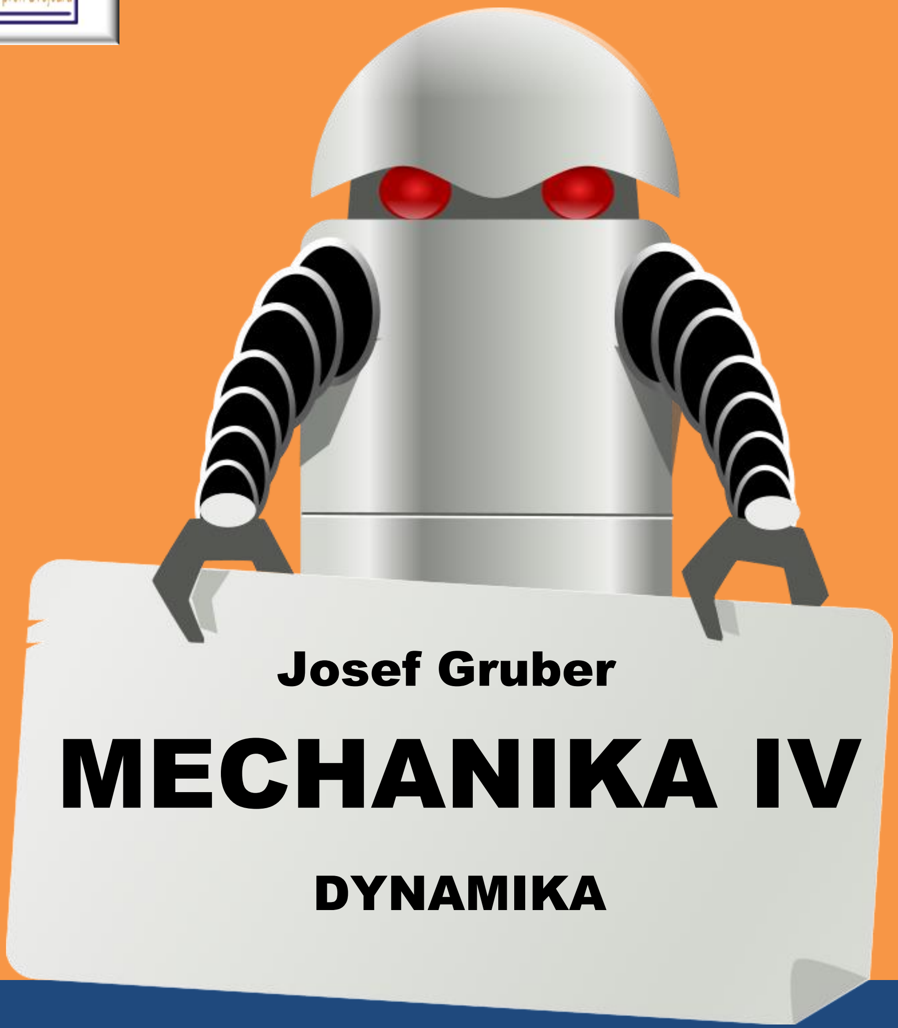
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STROJNICKÁ A STŘEDNÍ ODBORNÁ ŠKOLA PROFESORA ŠVEJCARA, PLZEŇ, KLATOVSKÁ 109



Vytvořeno v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost CZ.1.07/1.1.30/01.0038 Automatizace výrobních procesů ve strojírenství a řemeslech

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

OBSAH

DYNAMIKA

DYNAMIKA

1. PŘEDMĚT DYNAMIKY, JEJÍ VÝVOJ

Obsah této kapitoly:

→ *Předmět dynamiky, základní úlohy*

→ *Historický vývoj*

Předmět dynamiky, základní úlohy

Dynamika je část mechaniky, která studuje pohybové změny způsobené silovými účinky (tedy změny pohybu s ohledem na jejich příčiny). Na rozdíl od kinematiky pracuje s hmotností a setrvačností. Základní otázkou kinematiky je „JAK“ (se mění pohyb tělesa), základní otázkou dynamiky je „PROČ“.

Základními úlohami dynamiky jsou buď určení zrychlení tělesa na základě znalosti působících sil, nebo určení silových účinků, které způsobily známou změnu pohybového stavu.

Základní rovnicí dynamiky je druhý Newtonův pohybový zákon. Jakákoli dynamická úloha se dá tímto zákonem vyřešit.

Obr. 1

Na základě zrychlení můžeme počítat i další veličiny – dráhu, rychlost, čas. V tomto směru je nezbytnou průpravou pro úspěšné studium dynamiky kinematika.

Historický vývoj dynamiky

Tzv. **klasická dynamika** je plodem období 16. – 17. století, které je v dějinách vědy nazýváno vědeckou revolucí. Končí středověká představa statického geocentrického vesmíru, v němž se všechna tělesa pohybují kolem Země po soustředných kružnicích. **Mikuláš Koperník** (1473-1543) publikoval v roce své smrti heliocentrickou teorii, pozorování a výpočty předních astronomů **Tychona de Brahe** (1546-1601) a **Johannese Keplera** (1571-1631) prokázaly, že planety se pohybují po elipsách nerovnoměrným pohybem. **Galileo Galilei** (1564-1642) vnesl do teoretické vědy experimentální metodu, kterou narušil uznávaná dogmata starověké a středověké vědy, a předjal mimo jiné zákon setrvačnosti. Dovršitelem vývoje byl anglický učenec **Sir Isaac Newton** (1643-1727), který formuloval základní principy novodobé představy o přírodě. Především se jedná o gravitační zákon, tři pohybové zákony a novou matematiku, dnes nazývanou diferenciální a integrální počet. Tato vyšší matematika používá nekonečně malých hodnot a díky tomu umožňuje stanovení okamžitých hodnot veličin při proměnných dějích. Tyto principy používal ve starověku již Archimédes, ale Newton je tvůrcem uceleného systému.

Newtonova klasická dynamika dala vědě program na dvě století. Na základě výzkumu elektrických jevů a poznatků o mikrosvětě vznikla **relativistická dynamika**, popisující děje při rychlostech blízkých rychlosti světla (**Albert Einstein**, 1876-1955), a **kvantová mechanika**, zabývající se elementárními částicemi (**Max Planck**, 1858-1947).

Klasická newtonská mechanika neztrácí svoji platnost při popisu dějů v makrosvětě kolem nás. Je základem klasické teoretické fyziky.

2. POHYBOVÉ ZÁKONY, D´ALEMBERTŮV PRINCIP

Obsah této kapitoly:

→ *Pohybové zákony*

→ *Inerciální a neinerciální soustavy*

→ *D´Alembertův princip*

Pohybové zákony

Zákon setrvačnosti – I. pohybový zákon:
Těleso setrvává v klidu, nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není vnější silou nuceno tento svůj stav změnit.

Vnější síly mění rychlost pohybu tělesa (urychlení, zpomalení, uvedení z klidu do pohybu nebo zastavení tělesa) nebo trajektorii pohybu (zakřivení). Projevují se zrychlením **tečným** (změna velikosti rychlosti) nebo **normálovým** (křivočarý pohyb). Zrychlení je definováno II. pohybovým zákonem.

Tento zákon nelze přímo prakticky ověřit – žádné těleso není mimo účinek sil, stále působí tření, odpor prostředí, přitažlivost apod. Je vyvozen na základě pozorování snahy těles setrvávat v pohybovém stavu.

Zákon síly – II. pohybový zákon:
Změna pohybu je úměrná působící síle a má s ní stejný směr. Nepřímo úměrná je hmotnosti tělesa.

Matematicky vyjádřeno:

$$a = \frac{F}{m}.$$

V technické mechanice používáme tuto rovnici většinou ve tvaru:

$$F = m \cdot a.$$

(síla je rovna součinu hmotnosti tělesa a zrychlení).

Síla tíhová udělí tělesu o hmotnosti m tíhové zrychlení g $(G = m \cdot g)$, hmotnost setrvačná je rovna hmotnosti tíhové[1].

Zákon (princip) akce a reakce – III. pohybový zákon:
Vzájemné mechanické účinky mezi tělesy mají vždy stejnou velikost a směr, ale opačný smysl, tedy každé akci přísluší stejně veliká reakce opačného smyslu.

Tělesa mohou vzájemně působit buď přímým kontaktem, nebo pomocí pole, či interakcí mezi elementárními částicemi. Matematicky vyjadřujeme princip akce a reakce rovnicí:

$$F_1 = -F_2.$$

[1] V tzv. stavu beztíže bychom sice nepociťovali tíhu tělesa, ale setrvačné účinky ano. Newtonova teorie tuto rovnost nevysvětluje, z jejího hlediska se jedná o náhodu. Vysvětlení dává obecná teorie relativity.

Znaménko minus vyjadřuje, že se jedná o síly působící na různá tělesa (rovnice není podmínkou rovnováhy). Tento zákon jsme používali ve statice při aplikaci metody uvolňování.

Inerciální a neinerciální soustavy

Jako **inerciální vztažná soustava** se označuje taková vztažná soustava, v níž platí zákon setrvačnosti. Každá vztažná soustava, je-li vzhledem k dané inerciální soustavě v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, je rovněž inerciální.

Soustavy, v nichž zákon setrvačnosti neplatí, se nazývají **neinerciální**. Pohybují se pohybem přímočarým zrychleným, zpožděným, nebo křivočarými pohyby.

Kdybychom neuvažovali tření, předmět ve vozidle pohybujícím se se zrychlením, by pro pozorovatele na zemi setrvával v původní poloze. Pro pozorovatele ve vozidle by se však pohyboval v opačném smyslu k vektoru zrychlení, ačkoli by na předmět nepůsobila žádná vnější síla (tedy v rozporu se zákonem setrvačnosti). Tuto vlastnost hmotných těles někdy vyjadřujeme zavedením **setrvačné síly** jako síly **opačně zrychlující**. Pro rovnoměrně rotující těleso je touto silou **síla odstředivá**.

D´Alembertův princip[1]

D´Alembertův [*dalambérův*] princip je důležitým principem teoretické mechaniky[2], na který navazují další metody. Ve speciálním případě tohoto obecnějšího principu se jedná o jinou formu vyjádření II. pohybového zákona. V této formě jej technická mechanika používá jako **základní metodu** k řešení úloh.

Tento speciální případ d´Alembertova principu aplikujeme tak, že k vnějším silám působícím na těleso připojíme opačně zrychlující setrvačnou sílu rovnou součinu hmotnosti a zrychlení ($F_S = m \cdot a$) a pro takto vzniklou soustavu napíšeme podmínku dynamické rovnováhy (pohybovou rovnici):

$$\sum \mathbf{F_i} = \mathbf{0}.$$

Čteme: výslednice vnějších a setrvačných sil se rovná nule. Mějme na paměti, že se nejedná o statickou rovnováhu[3], protože setrvačné síly nejsou silami vnějšími.

Obr. 2

Příklad:

Sestavte pohybovou rovnici pro zrychlující automobil a vyjádřete tažnou sílu motoru pro dosažení daného zrychlení. Na automobil působí tažná síla motoru **F**, výsledná odporová síla tření **T** a odpor vzduchu $\mathbf{F_o}$.

---

[1] Jean Baptiste le Rond d´Alembert (1717-1783), francouzský matematik, fyzik a osvícenský filozof. Spolu s Diderotem připravoval Encyklopedii.

[2] Jeho úplné vyjádření se vymyká rozsahu běžné středoškolské matematiky.

[3] Ve statickou podmínku rovnováhy d´Alembertův princip přejde při nulovém zrychlení.

Řešení:
K soustavě vnějších sil připojíme opačně zrychlující sílu setrvačnou $\mathbf{F_s}$ a píšeme pohybovou rovnici:

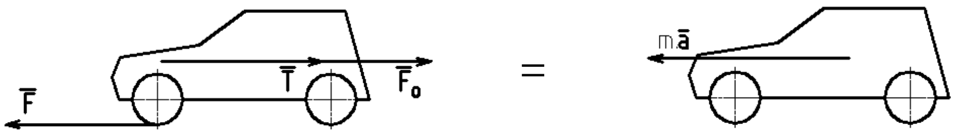
$$F - T - F_o - m \cdot a = 0, \text{ kde } m \cdot a \text{ je setrvačná síla.}$$

Tažná síla:

$$\underline{F = T + F_o + m \cdot a.}$$

Na automobil působí samozřejmě i tíhová síla, ale v pohybové rovnici psané pro vodorovný směr vystupovat nebude. Její vliv se projeví např. při výpočtu třecí síly.

Vyřešme nyní pro srovnání tuto úlohu přímou aplikací II. pohybového zákona. Výslednice vnějších sil se pak rovná součinu hmotnosti a zrychlení:



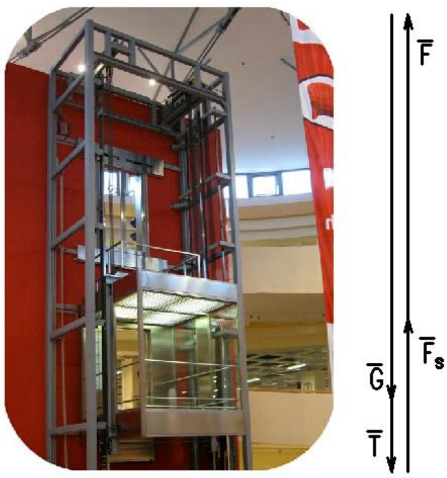
Obr. 3

$$\sum F_i = m \cdot a, \quad tedy \quad F - T - F_o = m \cdot a,$$

$$\underline{F = T + F_o + m \cdot a}$$

Při určování vnějších sil, působících na těleso, uplatníme s výhodou metodu uvolňování, známou ze statiky.

Příklad:



Sestavte na základě d´Alembertova principu pohybovou rovnici pro určení síly v závěsu klece výtahu, který zpomaluje se známým zpožděním při pohybu vzhůru. Kromě tíhové síly dále uvažujte výslednou třecí sílu.

Řešení:
Lano přerušíme myšleným řezem (uvolníme klec) a zavedeme vnitřní tahovou sílu. Při zpožděném pohybu směřuje vektor zrychlení proti smyslu pohybu (zpoždění = záporné zrychlení). Opačně zrychlující setrvačnou sílu $F_s = m \cdot a$ proto zavedeme ve smyslu pohybu:

$$G + T - F - m \cdot a = 0,$$

$$\underline{F = G + T - m \cdot a.}$$

Obr. 4

Připomeňme, že zrychlení může být zadáno např. prostřednictvím rychlosti a dráhy atd., znalost základů kinematiky je proto nezbytná.

Otázky a úkoly:

1. Čím se zabývá dynamika a čím kinematika?
2. Co způsobuje změnu velikosti a směru rychlosti tělesa a jak tyto změny vyjadřujeme?
3. Charakterizujte setrvačnou sílu.
4. Sestavte pohybovou rovnici pro vzlétající raketu a vyjádřete tažnou sílu motoru.
5. Zdůvodněte, proč se snáze přetrhne lanko, na němž je zavěšeno břemeno, při prudkém trhnutí než při pozvolném zvedání.

Příklad:

Příklad s výtahem řešte přímou aplikací II. pohybového zákona.

3. POHYBOVÁ ROVNICE HMOTNÉHO BODU

Obsah této kapitoly:

→ *D´Alembertův princip – shrnutí*

→ *Náhrada tělesa hmotným bodem*

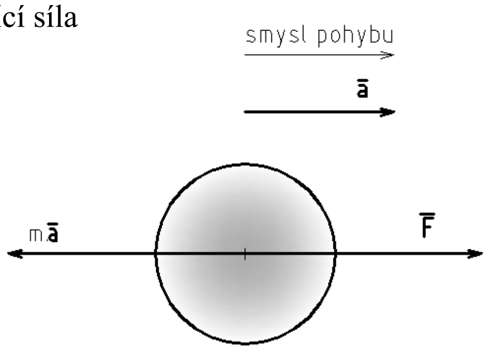
→ *Metodika řešení úloh d´Alembertovým principem*

D´Alembertův princip – shrnutí

K působícím vnějším silám připojíme setrvačnou sílu o velikosti $m \cdot a$, která je silou opačně zrychlující[1], a píšeme pohybovou rovnici analogickou statické podmínce rovnováhy: výslednice všech vnějších a setrvačných sil je rovna nule.

a) pohyb zrychlený ve vodorovném směru:

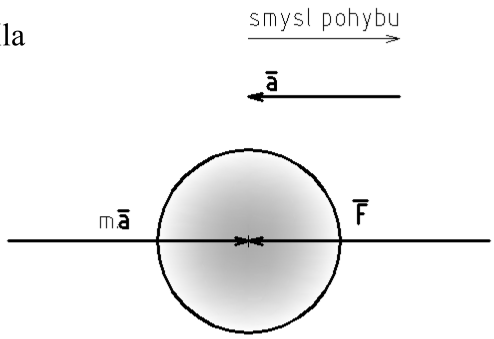
F – výsledná vnější zrychlující síla



Obr. 5

b) pohyb zpožděný ve vodorovném směru:

F – výsledná vnější brzdná síla



Obr. 6

V obou případech má pohybová rovnice tvar[2]:

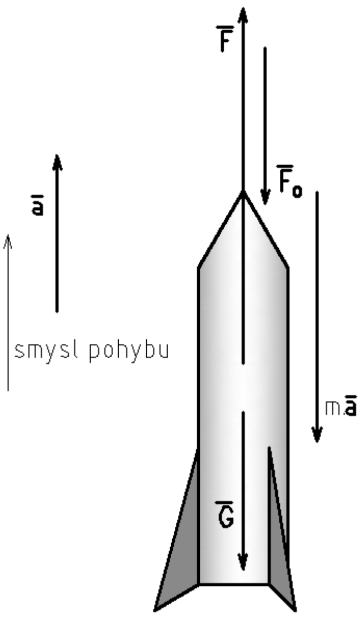
$$F - m \cdot a = 0.$$

c) pohyb ve svislém směru:

Zde se uplatní vliv tíhové síly. Uvedeme pouze případ, kdy těleso zrychluje směrem vzhůru (např. startující raketa, rozjíždějící se výtah atd.). Ostatní možnosti si žák doplní sám, případně budou uvedeny v příkladech.

[1] Připomeňme, že setrvačná síla není silou vnější, a proto pohybová rovnice není skutečnou podmínkou rovnováhy, je jí pouze formálně podobná.

[2] Pro nulové zrychlení přejde d´Alembertův princip ve statickou podmínku rovnováhy.



F – tažná síla raketového motoru,
G – tíhová síla,
$\mathbf{F_o}$ – odpor prostředí.

Pohybová rovnice:

$$F - G - F_o - m \cdot a = 0.$$

Výraz $F - G - F_o$ představuje velikost výslednice vnějších sil.

Obr. 7

Náhrada tělesa hmotným bodem[1]

V kinematice jsme uvedli, že těleso se může pohybovat pohybem **posuvným** (translačním) nebo **otáčivým** (rotačním), případně pohybem složeným. Při translačním pohybu mají všechny body tělesa stejnou rychlost a zrychlení, a proto je možné nahradit těleso hmotným bodem (hmotnost soustředíme do těžiště tělesa).

Pohybová energie hmotného bodu:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2.$$

Pohybová energie tělesa, složeného z konečného počtu prvků (hmotných bodů):

$$E_k = \sum \Delta E_k = \frac{1}{2} v^2 \cdot \sum \Delta m = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Těleso konající posuvný pohyb tedy můžeme nahradit hmotným bodem o hmotnosti odpovídající celkové hmotnosti tělesa (obvykle soustředěné do těžiště)[2].

Metodika řešení úloh d´Alembertovým principem

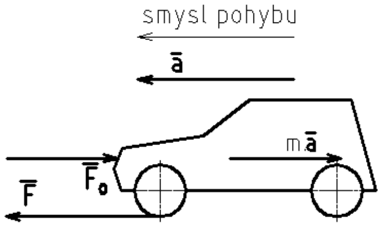
Nejprve nakreslíme schéma, do něhož zavedeme působící vnější síly. Poté si ujasníme, o jaký druh pohybu se jedná, zakreslíme pro informaci smysl pohybu a vektor zrychlení a v těžišti tělesa zavedeme opačně zrychlující setrvačnou sílu, jejíž velikost se rovná $m \cdot a$. Sestavíme pohybovou rovnici, v níž se součet vnějších sil a síly setrvačné rovná nule. Řešíme neznámou veličinu.

Příklad:
Určete tažnou sílu motoru auta, které se rozjede z klidu za čas 5 s na rychlost 60 km.h^{-1}. Hmotnost auta je m = 1200 kg a odpor proti jízdě je 0,01 tíhové síly.

[1] Hmotný bod je malé těleso, u něhož neuvažujeme tvar a rozměry, avšak přisuzujeme mu určitou hmotnost.
[2] Pokud se jedná o homogenní těleso, hmotnost prvku Δm nahradíme tzv. diferenciálem *dm* a výraz $\frac{1}{2} v^2 \sum \Delta m$ výrazem $\frac{1}{2} v^2 \int dm$ (čteme integrál *dm*). Výsledek je v tomto případě stejný.

Řešení:
Jedná se pohyb rovnoměrné zrychlený z klidu. Hledáme sílu, která způsobí tuto pohybovou změnu, potřebujeme tedy znát zrychlení. Zadané hodnoty převedeme na základní jednotky.

$$a = \frac{v}{t} = \frac{16{,}67}{5} = 3{,}334\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}}).$$



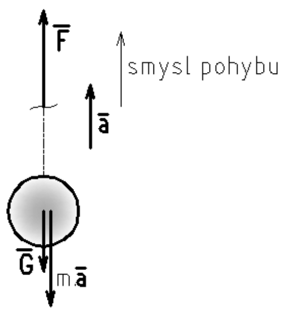
Obr. 8

Pohybová rovnice: $F - 0{,}01mg - ma = 0,\ F_o = 0{,}01G,$

$F = 0{,}01mg + ma = 0{,}01 \cdot 1200 \cdot 9{,}81 + 1200 \cdot 3{,}334 = \underline{4\,118{,}52\ (\mathrm{N})}.$

Příklad:
Určete hmotnost břemene, které by se muselo zvedat na laně se zrychlením a = 3,8 m.s^{-2}, aby se lano přetrhlo. Průřez lana je 50,3 mm^2, mez pevnosti je 51 MPa.

Řešení:
Lano přerušíme myšleným řezem a zavedeme vnitřní tahovou sílu. Setrvačná síla je silou opačně zrychlující. Pohyb je rovnoměrně zrychlený z klidu.



Obr. 9

Síla, při níž se lano přetrhne, má velikost $F = S \cdot R_m = 50{,}3 \cdot 51 = 2\,563{,}5\ (\mathrm{N})$.

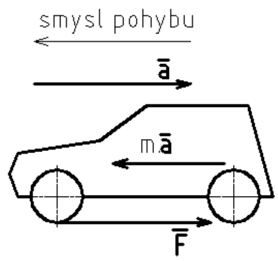
Pohybová rovnice: $G - F + ma = 0, tedy\ mg - F + ma = 0,$

$$m = \frac{F}{g + a} = \frac{2\,563{,}5}{9{,}81 + 3{,}8} = \underline{188{,}4\ (\mathrm{kg})}.$$

Příklad:
Automobil, jehož hmotnost je m = 1500 kg, se blíží ke křižovatce rychlostí 45 km.h^{-1}. Na jaké dráze zastaví pomocí brzdné síly F = 10 kN?

Řešení:
Úkolem je vypočítat dráhu. Tuto kinematickou veličinu určíme z rychlosti a zpoždění (jedná se pohyb rovnoměrně zpožděný do zastavení), které vypočítáme z pohybové rovnice.

$$s = \frac{v^2}{2a}.$$



Obr. 10

Pohybová rovnice: $F - ma = 0.$

Zrychlení:
$$a = \frac{F}{m} = \frac{10\,000}{1500} = 6{,}67\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}}).$$

Hledaná dráha:
$$s = \frac{12{,}5^2}{2 \cdot 6{,}67} = \underline{11{,}7\ (\mathrm{m})}.$$

Úkoly a otázka:
1. Zformulujte postup při řešení dynamické úlohy d´Alembertovým principem.
2. Zakreslete vektor zrychlení při zrychleném a zpožděném pohybu hmotného bodu (tělesa).
3. Při jakém druhu pohybu a proč můžeme nahradit těleso hmotným bodem?

4. DOBOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

Obsah této kapitoly:

→ *Impuls síly a hybnost hmoty*
→ *Řešení dynamických úloh pomocí impulsu a hybnosti*
→ *Zákon zachování hybnosti*
→ *Mechanická práce*
→ *Mechanická energie, zákon zachování*
→ *Řešení dynamických úloh energetickou metodou*
→ *Zákon zachování mechanické energie*

Impuls síly a hybnost hmoty

Impulsem síly nazýváme dobový účinek síly. Stejně velkým impulsem můžeme působit buď menší silou po delší dobu, nebo větší silou po kratší dobu. Tento impuls se rovná změně hybnosti tělesa[1]. Rovnice vyjadřující vztah mezi impulsem síly a změnou hybnosti souvisí s II. pohybovým zákonem (uvedeno pro pohyb rovnoměrně zrychlený a sílu konstantní velikosti):

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t},$$

$$\underline{\mathbf{F} \cdot t = m \cdot \mathbf{v} - m \cdot \mathbf{v_0}}.$$

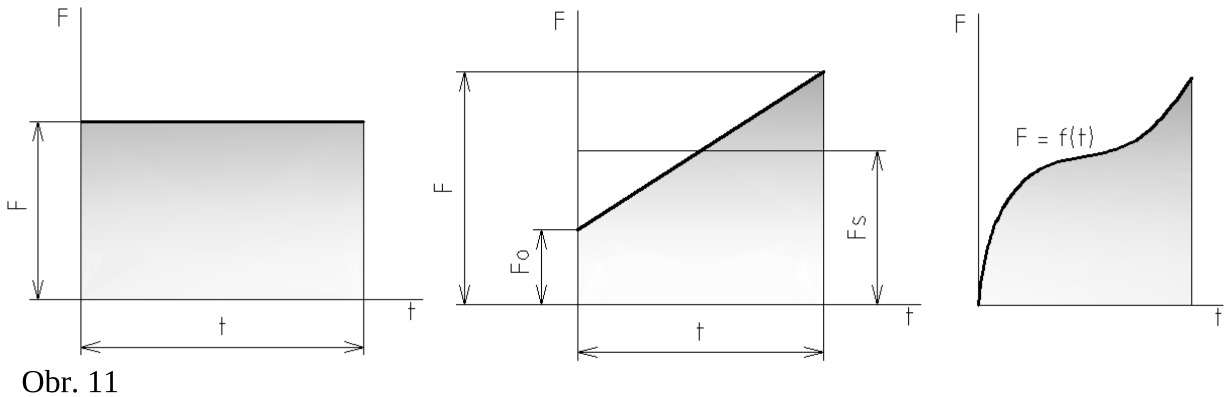
Síla F je obecně výslednicí vnějších sil ($\mathbf{F} = \sum \mathbf{F_i}$). Síly hnací budou kladné, síly odporové záporné. Impuls a hybnost jsou vektorové veličiny, tj. pokud se smysl pohybu účinkem síly obrátí, musíme ve skalární rovnici přidělit velikosti příslušné hybnosti opačné znaménko.

Obecnější formulace II. pohybového zákona definuje sílu pomocí časové změny hybnosti.

Jednotkou impulsu[2] o velikosti $I = F \cdot t$ je Ns (newtonsekunda), jednotkou hybnosti o velikosti $H = m \cdot v$ je kgm.s^{-1}. Rozměrově jsou obě (vektorové) veličiny samozřejmě totožné.

Grafické znázornění impulsu

V diagramu $F - t$ (závislost síly a času) je impuls I reprezentován obsahem plochy pod čarou průběhu síly:



Obr. 11

---

[1] Hybnost je jakousi „mírou pohybu“ tělesa. V historii dnešní pojmy hybnost, síla, energie splývaly.
[2] Impuls se používá např. při určování tahu raketových motorů.

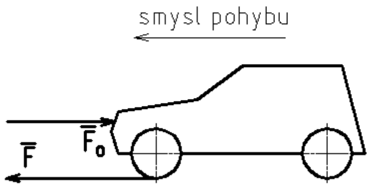
Řešení dynamických úloh pomocí impulsu a hybnosti

Pomocí impulsu a hybnosti můžeme s výhodou řešit úlohy, v nich hraje roli čas jako veličina známá nebo hledaná. Vedle aplikace II. pohybového zákona nebo d´Alembertova principu se tak jedná o další metodu řešení dynamických úloh. Zde samozřejmě nezavádíme žádné setrvačné síly, pracujeme pouze se silami vnějšími.

Pro ilustraci vyřešíme příklad, počítaný v kapitole 3 d´Alembertovým principem.

Příklad:
Určete tažnou sílu motoru auta, které se rozjede z klidu za čas 5 s na rychlost 60 km.h^{-1}. Hmotnost auta je m = 1200 kg a odpor proti jízdě je 0,01 tíhové síly.

Řešení:



Obr. 12

Do schématu zakreslíme působící vnější síly. Síla hnací bude mít ve skalární rovnici kladné znaménko, síla odporová záporné. Musíme ovšem na pravé straně rovnice důsledně psát hybnost konečnou minus hybnost počáteční.

Impuls celkové výsledné vnější síly se rovná změně hybnosti tělesa:

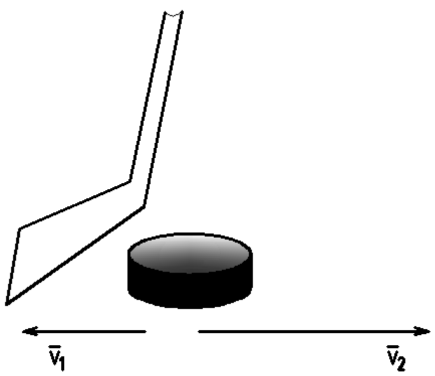
$(F - F_0) \cdot t = m \cdot v - m \cdot v_0$, počáteční rychlost $v_0 = 0$.

Hledaná síla:

$$F = F_0 + m \cdot \frac{v}{t} = 0{,}01 \cdot 1200 \cdot 9{,}81 + 1200 \cdot \frac{16{,}67}{5} = \underline{4\,118{,}52\ (\mathrm{N})}.$$

V této úloze jsme nemuseli počítat zrychlení jako při aplikaci d´Alembertova principu.

Příklad:

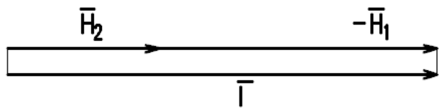


Obr. 13

Hokejový puk o hmotnosti m = 0,2 kg se pohybuje jedním směrem rychlostí v_1 = 10 m.s^{-1}. Úderem hole obdrží rychlost v_2 = 20 m.s^{-1} v opačném směru. Vypočtěte velikost impulsu síly I, který působil na puk.

Řešení:

$$I = H_2 + H_1 = m \cdot v_2 + m \cdot v_1 = 0{,}2 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 10 = \underline{= 6\ (\mathrm{Ns})}.$$



Odečtení vektorů = přičtení opačného vektoru znamená součet velikostí hybností.

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování hybnosti je méně obecným fyzikálním zákonem než zákon zachování mechanické energie, ale je mu formálně podobný:

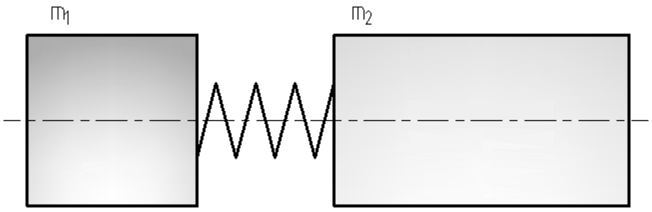
Pokud na soustavu nepůsobí vnější síly, její celková hybnost se zachovává.

Z tohoto zákona plyne:

Obdrží-li dvě tělesa stejný impuls, nabudou ve stejném čase číselně stejné hybnosti.

Příklad:

Jsou dána dvě tělesa známých hmotností spojená pružinou. Určete, jakých nabudou rychlostí v čase t po uvolnění pružiny, je-li její střední síla F_p. Odpory neuvažujte.



Obr. 14

Řešení:

Obě tělesa obdrží stejný impuls:

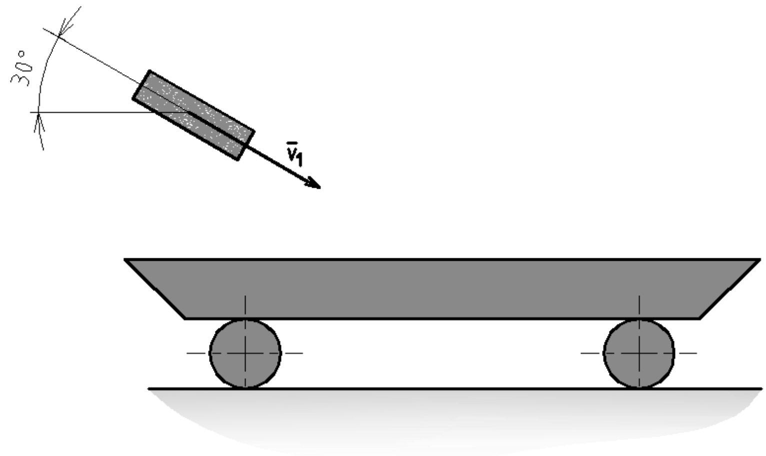
$$F_p \cdot t = m_1 \cdot v_1, \qquad v_1 = \frac{F_p \cdot t}{m_1}.$$

$$F_p \cdot t = m_2 \cdot v_2, \qquad v_2 = \frac{F_p \cdot t}{m_2}.$$

Zákon zachování hybnosti: neuvažujeme-li vnější síly (odpory tření a prostředí), celková hybnost, jejíž velikost je při stlačení pružiny 0 (tělesa v klidu), se zachovává. Vektorově: $\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2} = \mathbf{0}$, skalárně $m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0$ (pohyby opačným směrem).

Příklad:

Na vozík o hmotnosti m_2 = 25 kg, který je v klidu, hodíme cihlu o hmotnosti m_1 = 0,6 kg. Cihla dopadne rychlostí v_1 = 10 m.s^{-1} pod úhlem 30°. Určete společnou rychlost vozíku s cihlou. Odpory neuvažujte.



Obr. 15

Řešení:
U tohoto příkladu si musíme znovu uvědomit, že hybnost je vektorová veličina (představme si situaci, že na vozík dopadne cihla kolmo – vozík se nerozjede). Uvažujeme tedy složky hybnosti ve směru pohybu vozíku.

Velikost celkové hybnosti soustavy před dopadem:
$H_1 = m_1 \cdot v_1 \cdot \cos 30.$

Velikost celkové hybnosti soustavy po dopadu:
$H_2 = m_1 \cdot v_2 + m_2 \cdot v_2$

Výpočet společné rychlosti po dopadu cihly (hybnosti se podle zákona zachování číselně rovnají):
$(m_1 + m_2) \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1 \cdot \cos 30,$

$$v_2 = \frac{m_1 \cdot v_1 \cdot \cos 30}{(m_1 + m_2)} = \frac{0{,}6 \cdot 10 \cdot \cos 30}{0{,}6 + 25} = \underline{0{,}203\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Úloha s cihlou a vozíkem je příkladem úlohy na tzv. nepružný ráz. Úlohy o rázu řešíme s výhodou právě pomocí změny hybnosti.

Mechanická práce

Dráhový účinek síly nazýváme mechanickou prací. Práci konáme při překonávání odporů po dráze ve směru síly. Mechanickou práci *W* vypočítáme, násobíme-li sílu průmětem dráhy do směru síly, nebo znásobíme-li dráhu složkou síly ve směru dráhy[1].

Práce stálé síly při zvedání břemene do výšky *h* (obr. 16):
Překonáváme odpor tíhy, zvednutím tělesa zvětšíme jeho polohovou energii.

$$W = F \cdot h = G \cdot h = m \cdot g \cdot h.$$

Práce šikmé stálé síly na vodorovné rovině (obr. 17):
Překonáváme třecí sílu (odpor smykového tření).

$$W = F_x \cdot s = F \cdot s \cdot \cos\alpha = mg \cdot f \cdot \cos\alpha.$$

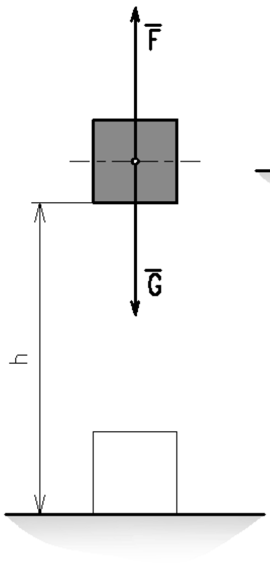
Vztah $F \cdot \cos\alpha$ představuje složku síly ve směru dráhy, vztah $s \cdot \cos\alpha$ průmět dráhy do směru síly.

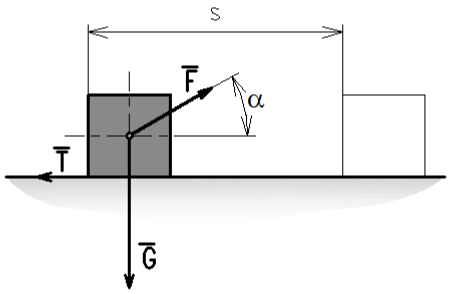
Práce stálé síly při pohybu po nakloněné rovině (obr. 18):
Překonáváme odpor tíhy, násobíme sílu *F* rovnou složce tíhové síly ve směru dráhy touto dráhou *s*, nebo tíhovou sílu *G* dráhou ve směru této síly, tj. *h*.

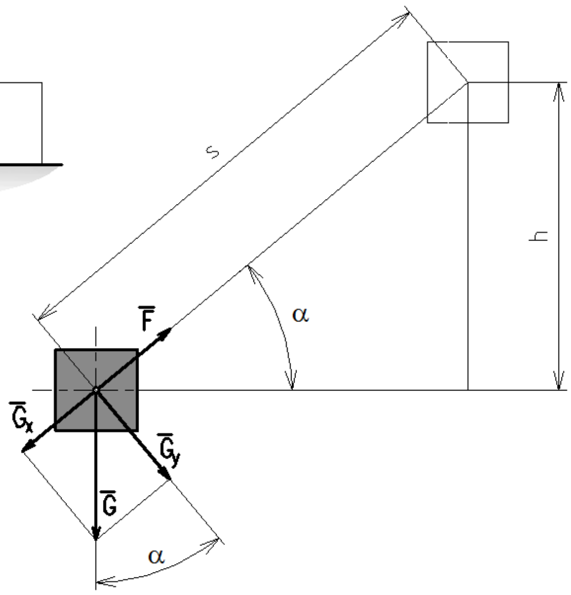
$$W = F \cdot s = G_x \cdot s = mg \cdot s \cdot \sin\alpha = mg \cdot h.$$

[1] Přestože je práce veličinou skalární, cítíme, že směr a smysl u ní hrají určitou roli. Ve vyšší matematice je práce vyjádřena tzv. skalárním součinem vektoru síly a polohového vektoru ve směru dráhy. Tímto skalárním součinem je zmíněný průmět.

Vztah $mg \cdot \sin\alpha = G_x$ vyjadřuje průmět síly do směru dráhy, vztah $s \cdot \sin\alpha = h$ vyjadřuje průmět dráhy do směru tíhové síly.







Obr. 16

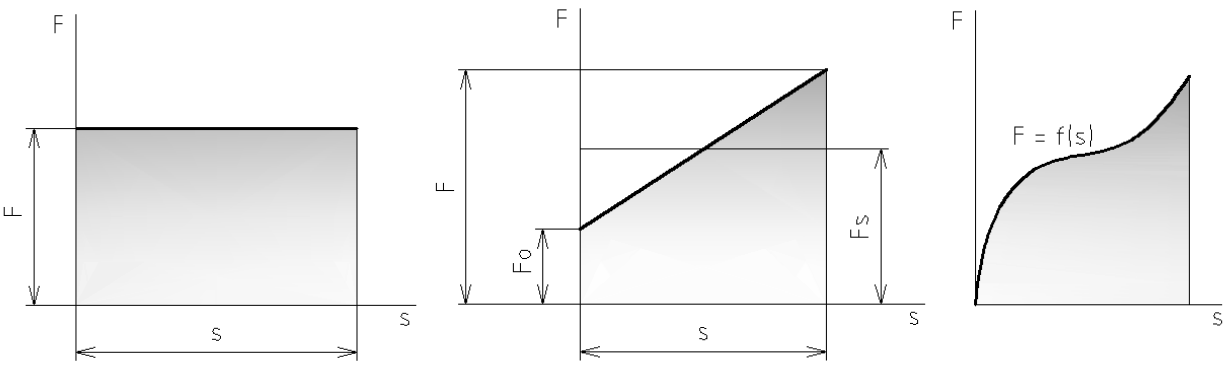
Obr. 17

Obr. 18

Někdy se říká, že nakloněná rovina uspoří práci při zvedání břemene. Uspoří však pouze „námahu“, nikoli mechanickou práci jako fyzikální veličinu.

Grafické znázornění práce stálé a proměnné síly

V diagramu $F - s$ (závislost síly a dráhy) je práce W reprezentována obsahem plochy pod čarou průběhu síly:



a) b) c)

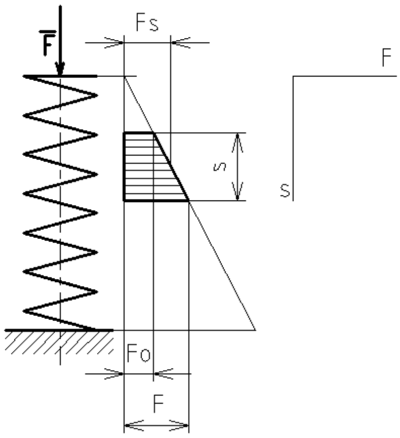
Obr. 19

Na obr. a je znázorněna práce stálé síly (plocha obdélníka). Na obr. b) je práce síly, která lineárně vzrůstá, což je např. případ práce na pružině nebo práce vykonaná při navíjení volně visícího lana (plocha lichoběžníka, při $F_0 = 0$ pak plocha trojúhelníka), a na obr. c je práce obecně proměnné síly popsané funkcí $F = f(s)$.

Připomeňme si také diagram zkoušky tahem – jeho plocha odpovídá deformační práci.

Příklad:
Vypočítejte práci ventilové pružiny, která je v předpruženém stavu zatížena silou F_0 = 100 N a při největším zdvihu ventilu s = 20 mm silou F = 250 N.

Řešení:



Hledaná práce odpovídá číselně ploše lichoběžníka. Její velikost můžeme určit převedením na obdélník, jehož jedna strana je rovna dráze a druhá aritmetickému průměru zatěžujících sil (tedy střední hodnotě síly):

$$W = F_s \cdot s = \frac{F_0 + F}{2} \cdot s = \frac{100 + 250}{2} \cdot 0{,}02 = \underline{3{,}5\ (\mathrm{J})}.$$

Rozměr joulu je Nm, proto musíme stlačení pružiny převést na metry.

Obr. 20

Mechanická energie, zákon zachování

Zdvihneme-li těleso o výškový rozdíl h, vykonáme práci $mg \cdot h$ a těleso má v této poloze schopnost tutéž práci vykonat. Má **potenciální polohovou energii**

$$E_g = mg \cdot h.$$

Jinou formou mechanické energie je deformační energie (viz pružnost a pevnost) a tlaková energie vody.

Padá-li těleso z této polohy, klesá jeho potenciální polohová energie a zvětšuje se jeho rychlost. Při dopadu z výšky h může vykonat práci

$$W = mg \cdot h = mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Polohová energie se tedy přeměnila na **pohybovou (kinetickou) energii**

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Celková mechanická energie se nezměnila. Celková mechanická energie by byla stejná i během pádu $\left(E_g + E_k = konst.\right)$, což je důsledek zákona zachování mechanické energie.

Zákon zachování mechanické energie: celková mechanická energie tělesa je stálá[1].

[1] Nezaměňme zákon zachování mechanické energie s obecným zákonem zachování energie.

Řešení dynamických úloh energetickou metodou

Pro dynamické výpočty používáme rovnici, která vyjadřuje vztah mezi prací zrychlujících nebo brzdných sil a změnou kinetické (pohybové) energie. Rovnice vyjadřující vztah mezi mechanickou prací a změnou kinetické energie souvisí s II. pohybovým zákonem a se zákonem zachování mechanické energie:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2s},$$

$$\underline{F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2}\ (\mathrm{J}).$$

Síla F $(\mathbf{F} = \sum \mathbf{F_i})$ je výslednicí vnějších sil. Síly hnací, zrychlující mají kladné znaménko (a jejich práce rovněž), síly odporové (a jejich práce) mají záporné znaménko. Opět důsledně dodržujeme na pravé straně rozdíl energie konečné minus energie počáteční. Řešení dynamických úloh pomocí této rovnice nazýváme energetickou metodou.

Energetická metoda je výhodná např. v případě, že v úloze hraje roli dráha jako veličina známá nebo hledaná. Pro ilustraci opět vyřešíme příklad zmiňovaný v kapitole o d´Alembertově principu.

Příklad:
Určete sílu F, která působí v lanech výtahové kabiny, jestliže výtah zastaví z rychlosti v = 1,2 m.s^{-1} na dráze s = 1 m. Hmotnost kabiny je 200 kg. Tření zanedbejte.

Řešení:
Zanedbáme-li tření, překonáváme pouze odpor tíhové síly. Kladnou práci koná síla v závěsu kabiny.

$$(F - G) \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2.$$

Konečná rychlost $v = 0$.

Hledaná síla:

$$F = G - m \cdot \frac{v_0^2}{2s} = 200 \cdot 9{,}81 - 200 \cdot \frac{1{,}2^2}{2 \cdot 1} = \underline{1\,818\ (\mathrm{N})}$$[1].

Dalším výhodným uplatněním energetické metody je situace, že potřebujeme řešit pohyb v tíhovém poli Země po zakřivené dráze. Tento poznatek jsme použili v kapitole o odstředivé síle (rychlost hmotného bodu ve svislé rovině).

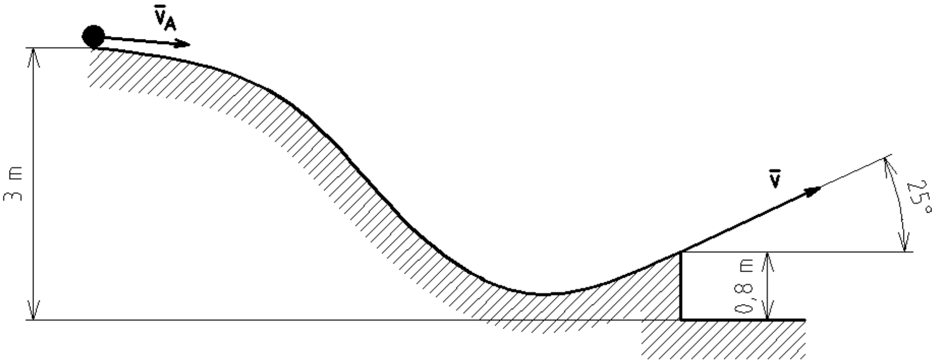
Práce v tíhovém poli Země (tzv. potenciální silové pole) nezávisí na tvaru dráhy.

Příklad:
Hmotný bod o hmotnosti m = 2 kg se začne pohybovat po zakřivené dráze s počáteční rychlostí v_A = 2 m.s^{-1}. Určete rychlost v bodě B, kde dráhu opustí. Odpory neuvažujte.

[1] Opět jsme nemuseli počítat zrychlení, v rovnici je vyjádřeno vztahem $\frac{v^2}{2s}$.

Řešení:
V tíhovém poli Země nezávisí práce na tvaru dráhy. Neuvažujeme-li odpory, jediná vnější síla konající práci je síla tíhová.

$W = G \cdot \Delta h = mg \cdot (3 - 0{,}8)$.



Obr. 21

Tato práce (pokles polohové energie hmotného bodu) se projeví přírůstkem kinetické energie:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Z rovnice $W = \Delta E_k$ plyne:

$$v = \sqrt{v_A^2 + 2g \cdot (3 - 0{,}8)} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}2} = \underline{6{,}87\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Rychlost nezávisí na hmotnosti.

Otázky a úkoly:
1. Jak je definována hybnost?
2. Kdy je výhodné použít k řešení dynamické úlohy vztah mezi impulsem síly a změnou hybnosti a jak zní tento vztah?
3. Vyslovte zákon zachování hybnosti. Jak se projeví tento zákon při výstřelu ze střelné zbraně a při vyskakování z loďky na břeh?
4. Vysvětlete, kdy konáme mechanickou práci a jak se práce vypočítá.
5. Jaké jsou druhy mechanické energie a jak se vypočítá jejich velikost?
6. Vyslovte zákon zachování mechanické energie a vysvětlete, jak se projevuje u padajícího tělesa.
7. Kdy je výhodné úlohy řešit energetickou metodou?

5. VÝKON, PŘÍKON A ÚČINNOST

Obsah této kapitoly:

→ *Definice a výpočet výkonu*

→ *Účinnost*

→ *Sériové řazení mechanických soustav (celková účinnost zařízení)*

Definice a výpočet výkonu

Obr. 22

Výkon (dříve také „pracovní efekt“) je práce vykonaná za jednotku času. Základní fyzikální vztah

$$P = \frac{W}{t}\ (\mathrm{W}).$$

udává střední (průměrný) výkon. Jednotkou[1] je watt (W), v technické praxi se setkáme nejčastěji s kW, u velkých energetických strojů s MW.

U pohybu rovnoměrného dosadíme za práci součin $F \cdot s$ a dostaneme

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v.$$

Výkon se u rovnoměrného pohybu rovná součinu síly a rychlosti.

U pohybu otáčivého vyjádříme dráhu jako délku kružnice opsanou bodem na obvodu rotoru neho hřídele za *i* otáček a síla bude odvodovou silou:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{F \cdot 2\pi r \cdot i}{t} = F \cdot r \cdot 2\pi n = M_k \cdot \omega.$$

Výkon se u rotačního pohybu rovná součinu momentu a úhlové rychlosti.

Vztah $F \cdot 2\pi r \cdot i$ udává práci točivého momentu:

$$W = F \cdot r \cdot 2\pi i = M_k \cdot \varphi.$$

Veličina $\varphi\ (rad)$, známá z kinematiky, je úhlová dráha. Rovnice $W = M_k \cdot \varphi$ je analogická (formálně a myšlenkově podobná) rovnici pro přímočarý pohyb $W = F \cdot s$.

Účinnost

Každý stroj nebo zařízení využívá jen část energie do něho přivedené. Tzv. ztráty jsou představovány energií, která se sice neztrácí (zákon zachování energie), ale není využitá. Příčinou ztrát je tření a sdílení tepla (ztráty mechanické, hydraulické, tepelné). Část energie

[1] Starší a dosud běžná jednotka (např. mezi motoristy) kůň (k) je přibližně 0,735 kW. Pro základní představu stačí pamatovat si orientačně ¾ kW.

nevratně odchází ve formě tepla podle II. termodynamického zákona. Je-li např. **příkon** (přiváděný výkon) stroje 4 kW a **výkon** 3 kW, znamená to, že se k užitečné činnosti využilo jen 75 % (tedy 3/4) příkonu. Tento poměr nazýváme **účinností**.

Účinnost η je poměr výkonu ku příkonu. Je mírou využití přiváděné energie.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} < 1\ (100\ \%).$$

Účinnost můžeme také vyjádřit pomocí prací či energií, jako poměr ideálního hnacího účinku ku skutečnému hnacímu účinku, nebo jako poměr skutečného zátěžného účinku ku ideálnímu hnacímu účinku.

$$\eta = \frac{\text{ideální hnací účinek}}{\text{skutečný hnací účinek}} \qquad \eta = \frac{\text{skutečný zátěžný účinek}}{\text{ideální zátěžný účinek}}$$

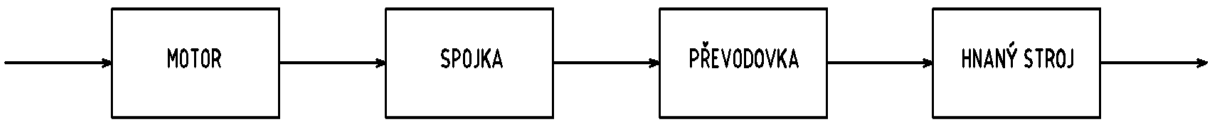
Obr. 23

Bilance výkonu:

$$P_1 = P_2 + P_z.$$

Sériové řazení mechanických soustav (celková účinnost zařízení)

Jedná se např. o soustavu motor – spojka – převodovka – poháněný stroj:



Do motoru přivádíme: P_1,
z motoru odvádíme: $P_1 \cdot \eta_1$,
do spojky přivádíme: $P_1 \cdot \eta_1$,
ze spojky odvádíme: $P_1 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2$
atd.

Výkon odváděný ze zařízení: $P_2 = P_1 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_n$. **Účinnosti se násobí.**

Příklad:
Jeřáb zvedá břemeno m = 5 t za 20 s do výšky 5 m. Určete příkon elektromotoru v kW, jestliže celková účinnost je 70 %.

Řešení:
Výkon potřebný pro rovnoměrné zvedání břemene:

$$P_2 = G \cdot v = mg \cdot \frac{h}{t} = 5000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{5}{20} = 12\,265{,}5\ \text{(W)}.$$

Příkon:

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} = \frac{12\,256{,}5}{0{,}7} = 17\,509{,}29\ \text{(W)} = \underline{17{,}5\ \text{(kW)}}.$$

Obr. 24

Příklad:
Odvoďte rovnici pro účinnost zvedání šroubového zvedáku.

Řešení:
Použijeme poznatku, že účinnost je dána poměrem ideálního hnacího účinku ku skutečnému.

Ideální hnací účinek (ze statiky):
$F_1 = G \cdot \tan\gamma$, kde F_1 je obvodová síla, G tíhová síla břemene a γ je úhel stoupání.

Skutečný hnací účinek:
$F_1 = G \cdot \tan(\gamma + \varphi)$, kde φ je třecí úhel.

Účinnost zvedání:

$$\eta = \frac{\tan\gamma}{\tan(\gamma + \varphi)}.$$

Příklad:
Na vstupní hřídel třístupňové převodovky je přiváděn příkon P_1 = 13,1 kW. Otáčky vstupního hřídele jsou n_1 = 1520 min^{-1}. Ozubená kola převodovky mají tyto počty zubů: z_1 = 59, z_2 = 32, z_3 = 54, z_4 = 27, z_5 = 49, z_6 =22. Mechanická účinnost každého soukolí je 0,93. Určete výkon, který přenáší výstupní hřídel převodovky, a jeho kroutící moment.

Řešení:
Celková účinnost: $\eta_c = \eta^3 = 0{,}93^3 = 0{,}804$.

Výstupní výkon: $P_2 = P_1 \cdot \eta_c = 13{,}1 \cdot 0{,}804 = \underline{10{,}54\ \text{(kW)}}$.

Převodový poměr:

$$i_{1,6} = \frac{n_1}{n_6} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_6}{z_5}.$$

Výstupní otáčky:

$$n_6 = n_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} \cdot \frac{z_5}{z_6} = 1520 \cdot \frac{59}{32} \cdot \frac{54}{27} \cdot \frac{49}{22} = 12\,483{,}86\ (\mathrm{min}^{-1}) = \underline{208{,}06\ (s^{-1})}$$

- multiplikátor

Krouticí moment:

$$M_{k2} = \frac{P_2}{\omega_2} = \frac{10\,540}{2\pi \cdot 208{,}06} = \underline{8{,}06\ (\mathrm{Nm})}.$$

Otázky a úkoly:

1. Jak je definován průměrný výkon?
2. Vyjádřete účinnost zařízení.
3. Jak se vypočítá celková účinnost mechanické soustavy složené z několika strojů nebo mechanismů?
4. Jak se vypočítá práce a výkon momentu?

6. POHYB HMOTNÉHO BODU PO KRUŽNICI, ODSTŘEDIVÁ SÍLA

Obsah této kapitoly:

→ *Dostředivá a odstředivá síla*

→ *Pohyb ve vodorovné rovině – pohyb vozidla v zatáčce*

→ *Pohyb ve vodorovné rovině – hmotný bod na závěsu*

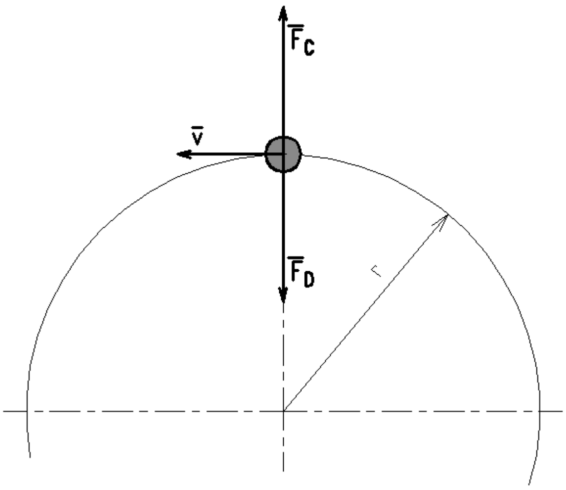
→ *Pohyb ve svislé rovině*

Dostředivá a odstředivá síla

Pokud na hmotný bod nepůsobí síla, pohybuje se tento hmotný bod rovnoměrně přímočaře. Má-li se hmotný bod pohybovat po kružnici (obecně po zakřivené dráze), musí na něj působit dostředivá (centripetální) síla F_D, která mění směr vektoru rychlosti.

Dostředivou silou může být tření (automobil v zatáčce), síla ve vlákně (lano, řetěz, táhlo), v pružině, přitažlivá síla atd. Projevem setrvačnosti hmotného bodu je opačně zrychlující **setrvačná odstředivá (centrifugální) síla F_C**, pomocí níž můžeme na základě d´Alembertova principu formulovat pohybovou rovnici pro hmotný bod rovnoměrně se pohybující po kružnici.

Obr. 25



$$F_D - F_C = 0,\, kde\; F_C = m \cdot a_n.$$

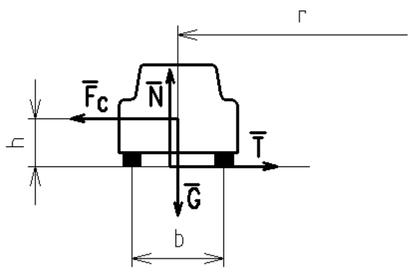
Normálové (dostředivé) zrychlení:

$$a_n = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r}.$$

Síla dostředivá je silou vnější, síla odstředivá silou setrvačnou. Odstředivé síly využívají odstředivky (odlučování látek), odstředivá čerpadla, odstředivé regulátory aj. U tělesa zavádíme výslednou odstředivou sílu v těžišti.

Obr. 26

Pohyb ve vodorovné rovině – pohyb vozidla v zatáčce



Na vozidlo projíždějící zatáčkou působí vnější síly: tíhová, normálová složka reakce, třecí (dostředivá). Setrvačnou silou je síla odstředivá.

Vozidlo může projít dvěma mezními stavy: prvním je smyk, druhým je překlopení. Z příslušných rovnic vypočítáme dvě rychlosti, při nichž k těmto mezním stavům dojde.

Obr. 27

Smyk:
Pohybová rovnice v ose *x*:

$$F_C - T = 0.$$

Statická podmínka rovnováhy v ose *y*:

$$G - N = 0.$$

Zákon smykového tření:

$$T = N \cdot f.$$

Po dosazení do pohybové rovnice obdržíme:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} - mg \cdot f = 0.$$

Rychlost na mezi smyku:

$$\underline{v = \sqrt{r \cdot g \cdot f}.}$$

Tato úloha zasahuje již do kapitoly o vázaném pohybu hmotného bodu se třením, což bude podrobněji probráno později.

Překlopení:
Klopný moment:

$$M_k = F_C \cdot h.$$

Moment stability:

$$M_s = G \cdot \frac{b}{2}.$$

Mezní stav:

$$M_k = M_s, \qquad m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot h = mg \cdot \frac{b}{2}.$$

Rychlost na mezi překlopení:

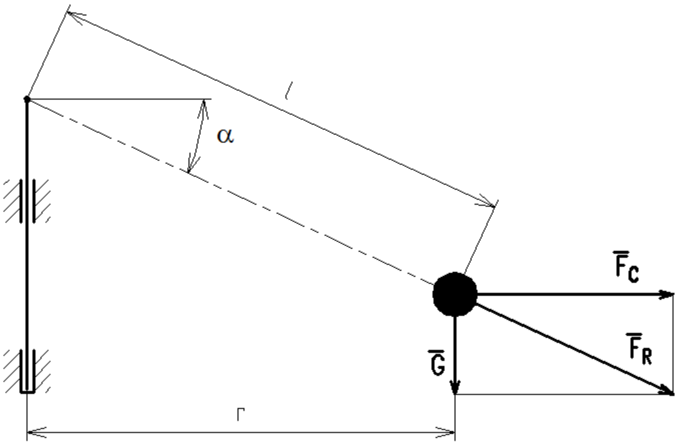
$$\underline{v = \sqrt{\frac{r \cdot g \cdot b}{2h}}.}$$

Na mezi překlopení prochází nositelka výslednice tíhové a odstředivé síly právě bodem, kolem něhož hrozí překlopení (vnější kolo). Zjednodušujícím předpokladem je, že těžiště leží na ose vozidla (v polovině rozchodu). Podle toho, která z mezních rychlostí vyjde menší, dojde buď dříve ke smyku, nebo k překlopení.

Pohyb ve vodorovné rovině – hmotný bod na závěsu

Příkladem může být řetízkový kolotoč, z technické praxe pak např. odstředivý regulátor - roztěžník. **Závěs se nastaví ve směru nositelky – vektorové přímky výslednice tíhové a odstředivé síly.** Situace je analogická předchozímu případu – překlopení vozidla. V tom případě lze zvýšit maximální rychlost nakloněním vozovky, aby zmíněná výslednice byla pokud možno kolmá k vozovce. Všimněte si, že vnější kolejnice na železnici je v zatáčce mírně výš než kolejnice vnitřní. Extrémní klopení má např. cyklistický ovál.

Obr. 28



Silový trojúhelník:

$$\tan\alpha = \frac{G}{F_C} = \frac{mg}{mr\omega^2} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

Poloměr rotace:

$$r = l \cdot \cos\alpha.$$

Obr. 29

Výpočet úhlu α:

$$\tan\alpha = \frac{g}{l \cdot \omega^2 \cdot \cos\alpha}.$$

Použitím vztahu:

$$\tan\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$$

dostaneme:

$$\underline{\sin\alpha = \frac{g}{l \cdot \omega^2}.}$$

Velikost síly ve vlákně obdržíme použitím Pythagorovy věty:

$$\underline{F_R = \sqrt{F_C^2 + G^2}.}$$

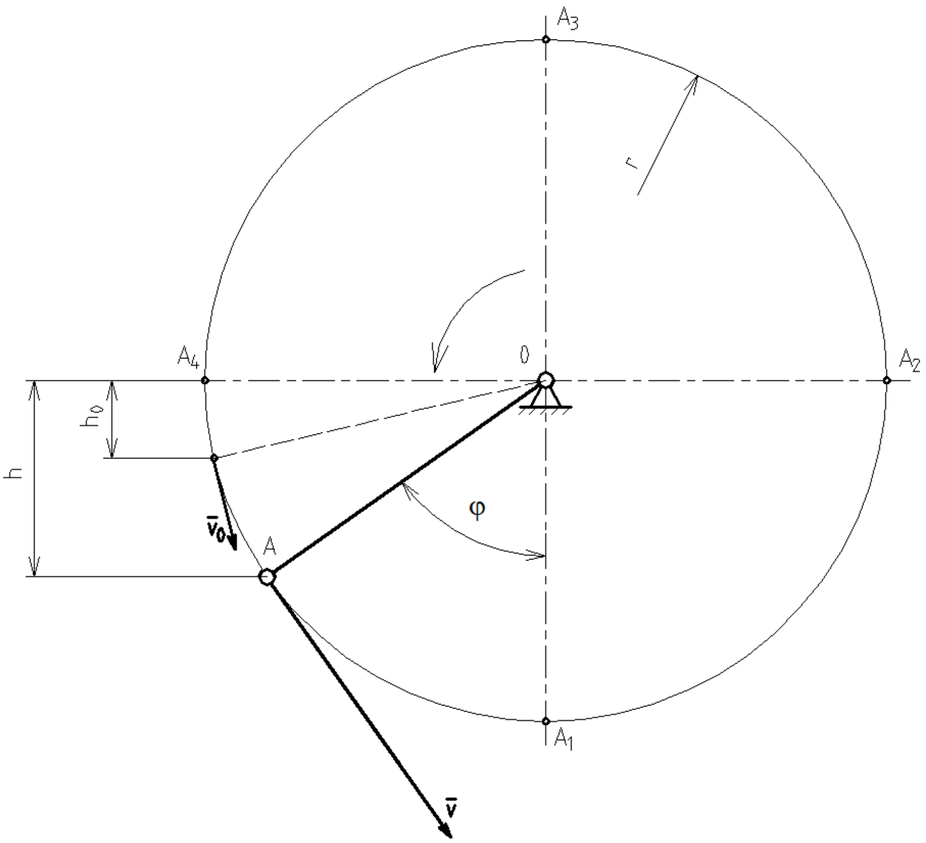
Pohyb ve svislé rovině

Obr. 30

Při tomto druhu pohybu má významný vliv nejen odstředivá, ale i tíhová síla. Tomuto pohybu odpovídá pohyb dětské houpačky, z technické praxe pak např. pohyb materiálu po bubnu pásového dopravníku, rotace nevyváženého rotoru atd. Rovněž lze takto modelovat pohyb vozidla přejíždějícího terénní vlnu. V letadle se tímto pohybem při výcviku astronautů simuluje chvilkový stav beztíže.

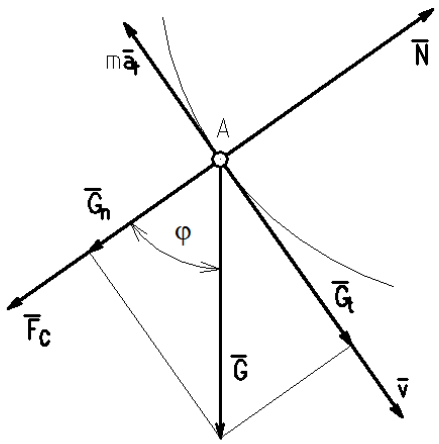
Na hmotný bod působí tyto **vnější síly**: tíhová síla **G** a normálová síla **N** (síla ve vlákně nebo reakce podložky). K nim zavedeme odpovídající **setrvačné síly**: tečnou setrvačnou sílu $m\mathbf{a_t}$ a setrvačnou odstředivou sílu $m\mathbf{a_n}$.

Úkolem bude sestavit složkové rovnice ve směru tečny a normály k trajektorii, vypočítat normálovou reakci a rychlost v obecném bodě. Dále můžeme vyšetřovat, za jakých podmínek se bod udrží na kruhové dráze, nebo kde bude rychlost maximální a minimální. Bod bude vypuštěn z obecné polohy a bude mu udělena počáteční rychlost v_0.



Obr. 31

Uvolnění bodu:



Obr. 32

Ve směru tečny k trajektorii:

$$G_t - m \cdot a_t = 0;\ \ m \cdot g \cdot \sin\varphi - m \cdot a_t = 0.$$

Ve směru normály:

$$G_n - N + F_C = 0;\ m \cdot g.\cos\varphi - N + m\frac{v^2}{r} = 0.$$

Tečné zrychlení: $a_t = g \cdot \sin\varphi$

Rychlost určíme nejsnáze ze **zákona zachování mechanické energie**; pokles polohové energie se přemění na přírůstek energie pohybové:

$$m \cdot g \cdot (h - h_0) = \frac{1}{2} m \cdot (v^2 - v_0^2),$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g(h - h_0)}.$$

Z rovnice ve směru normály poté můžeme vypočítat reakci N:

$$N = m \cdot g.\cos\varphi + m\frac{v^2}{r}.$$

Poloha A_1:
Dosaženo největší rychlosti ($h = r$): $v_{max} = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g(r - h_0)}$.
Největší síla ve vlákně:

$$N_{max} = m \cdot g.\cos\varphi + m\frac{v_{max}^2}{r}.$$

Poloha A_3:
Minimální rychlost (h = - r): $v_{min} = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g(-r - h_0)} = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g(r + h_0)}$.
Pohybová rovnice:

$$N + m \cdot g - m\frac{v_{min}^2}{r} = 0.$$

Síla ve vlákně:

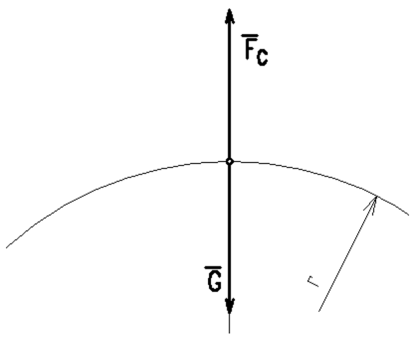
$$N = m\frac{v_{min}^2}{r} - m \cdot g.$$

Aby se bod vůbec udržel na kruhové dráze, musí v poloze A_3 platit $F_C = G$:

$$m\frac{v_{min}^2}{r} = m \cdot g, tedy\ v_{min} = \sqrt{g \cdot r}.$$

Příklad:
Určete potřebnou rychlost, kterou musí mít motocyklový kaskadér v drátěné kouli („stěna smrti“), aby mohl bezpečně projet vrcholem koule (tj. hlavou dolů). Koule má průměr 5 m.

Řešení:



Obr. 33

Ve vrcholu koule musí nastat minimálně dynamická rovnováha – rovnost tíhové a odstředivé síly. Pro bezpečný průjezd musí platit:

$F_C > G$,

$$m\frac{v^2}{r} > m \cdot g,$$
$$tedy\ v > \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}81 \cdot 2{,}5} = \underline{4{,}95\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Rychlost musí být větší než 4,95 m.s^{-1}, tj. 17,82 km.h^{-1}.

Úkoly a otázky:
1. Jaký je vztah mezi dostředivou a odstředivou silou?
2. Proč je vnější kolejnice v zatáčce výš než vnitřní?
3. Uveďte podmínku, aby se bod při pohybu po kružnici ve svislé rovině alespoň udržel na kruhové dráze.
4. Odvoďte vztah pro potřebnou počáteční rychlost v_0, aby se volně pohybující bod alespoň udržel na kruhové dráze.

7. VÁZANÝ POHYB HMOTNÉHO BODU A POSUVNÝ POHYB TĚLESA

Obsah této kapitoly:

→ *Pohyb volný a vázaný*

→ *Pohyb se třením po vodorovné rovině*

→ *Pohyb se třením po nakloněné rovině*

Pohyb volný a vázaný

Volný pohyb nastane, když se hmotný bod nebo těleso nestýká za pohybu s jiným tělesem. Vázaný pohyb je pohyb omezený vazbami. Vazby omezují počet stupňů volnosti bodu nebo tělesa. Základní metodou řešení vázaného pohybu je metoda uvolňování:

Těleso uvolníme (odstraníme vazby) a jejich účinky na těleso nahradíme vazbovými silami (reakcemi). Takto uvolněné těleso pak řešíme jako těleso volné.

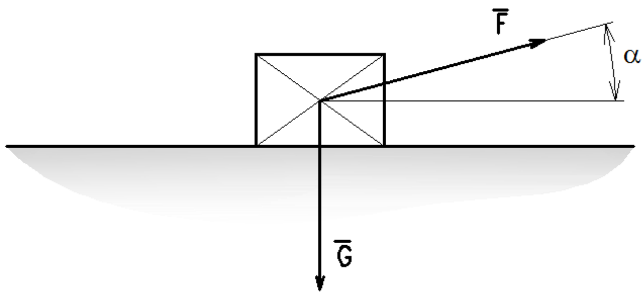
Těleso pohybující se posuvným pohybem (dráhy, rychlosti a zrychlení všech bodů tělesa jsou v daném okamžiku stejné) řešíme jako hmotný bod.

Pohyb se třením po vodorovné rovině

Řešení s využitím d´Alembertova principu je analogické se statikou. Složkami vazbové síly budou síly třecí a normálová.

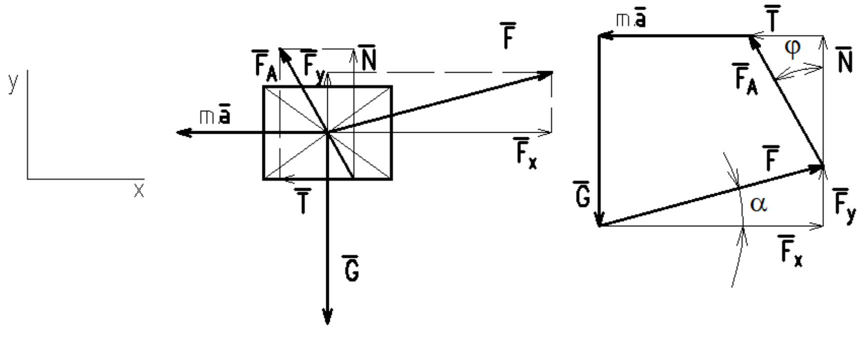
Příklad:

Sestavte pohybovou rovnici tělesa, které se pohybuje po vodorovné rovině zrychleným pohybem účinkem síly *F*.



Obr. 34

Řešení:



Obr. 35

Těleso nejprve uvolníme. Zvolíme souřadný systém, zakreslíme zatěžující vnější síly F a G a rozložíme je do směrů souřadných os. Připojíme druhotné – vazbové síly, resp. složky reakce podpory (třecí sílu T a normálovou složku N) a setrvačnou opačně zrychlující sílu o velikosti $m.a$. Pohybová rovnice – podmínka dynamické rovnováhy bude mít tvar:

$$F_x - T - m \cdot a = 0, \text{ tedy } F \cdot \cos\alpha - T - m \cdot a = 0.$$

Pohybovou rovnici doplníme statickou podmínkou v ose y a zákonem smykového tření:

$$F_y + N - G = 0, \text{ tedy } F \cdot \sin\alpha + N - G = 0,$$

$$T = N \cdot f.$$

Po dosazení do pohybové rovnice obdržíme rovnici o jedné neznámé, kterou bude většinou síla F nebo zrychlení a:

$$F \cdot \cos\alpha - (G - F \cdot \sin\alpha) \cdot f - m \cdot a = 0, \text{ tedy } \underline{F \cdot (\cos\alpha + f \sin\alpha) - G \cdot f - m \cdot a = 0}.$$

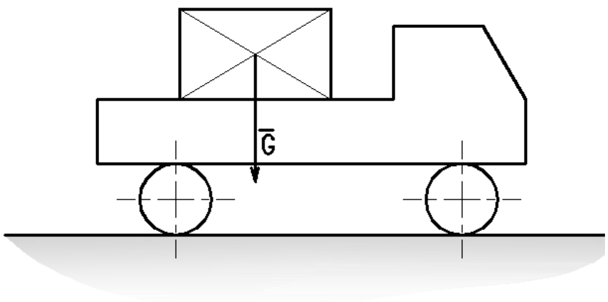
Z vypočítaného zrychlení můžeme řešit např. dráhu nebo rychlost v určitém čase. V tomto smyslu je průpravou pro dynamiku kinematika.

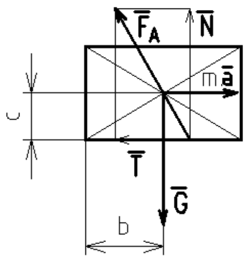
Úlohy můžeme řešit také **energetickou metodou** (řešení pouze naznačíme):

$$(F_x - T) \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2.$$

Doplňující rovnice jsou totožné (podmínka rovnováhy $\sum F_{iy} = 0$ a zákon smykového tření). Energetickou metodu s výhodou využijeme, je-li zadána či požadována dráha. V podobném smyslu (pokud je jednou z veličin čas) lze úlohu řešit i pomocí změny hybnosti.

Příklad:
Nákladní automobil dopravuje na své ložné ploše nezajištěné břemeno o hmotnosti m. Součinitel tření mezi korbou a břemenem je f = 0,4. Stanovte, s jakým největším zpožděním může automobil brzdit, aby se břemeno neposunulo, a za jakých podmínek by došlo k překlopení břemene.





Obr. 36
Obr. 37

Řešení:
a) posunutí břemene:
Protože se jedná o zpožděný pohyb, zavedeme setrvačnou sílu ve směru pohybu. Pohybová rovnice:

$T - m \cdot a = 0.$

Podmínka rovnováhy a zákon smykového tření:

$N - m \cdot g = 0,$
$T = N \cdot f.$

Po dosazení: $m \cdot g \cdot f - m \cdot a = 0$, $a_{max} = g \cdot f = 9{,}81 \cdot 0{,}4 = \underline{3{,}924\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2})}$.

b) překlopení břemene:
Mezním stavem je rovnováha momentu klopného (moment setrvačné síly) a momentu stability (moment tíhové síly):

$m \cdot a \cdot c = m \cdot g \cdot b.$

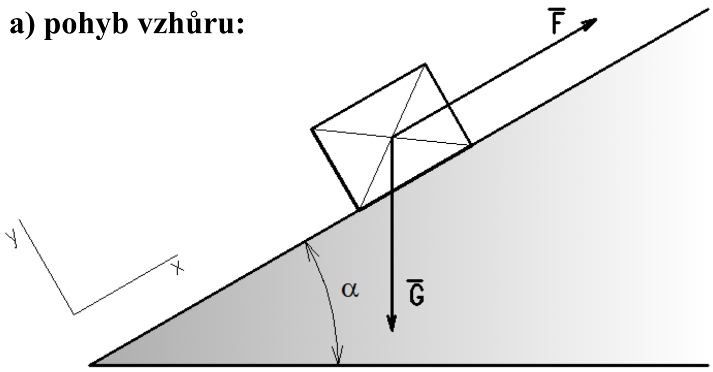
Maximální zrychlení na mezi překlopení:

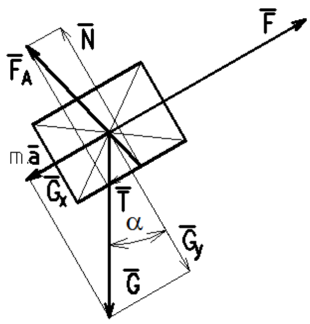
$$\underline{a_{max} = g \cdot \frac{b}{c}}.$$

Pohyb se třením po nakloněné rovině

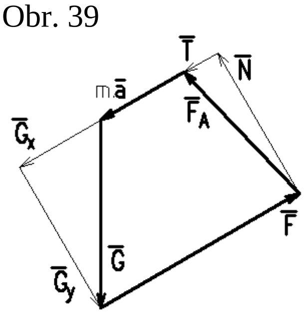
Úlohu řešíme zcela analogicky s pohybem po vodorovné rovině, v pohybové rovnici přibude pouze složka síly **tíhové**. Souřadnou soustavu zavedeme s výhodou tak že osa *x* je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Síla *F* může mít zcela obecnou polohu, zde ukážeme řešení na příkladu síly rovnoběžné s nakloněnou rovinou. V ostatních případech je třeba sílu rozložit.

a) pohyb vzhůru:





Obr. 38
Obr. 39



Pohybová rovnice $\sum F_{ix} = 0$:

$F - G \cdot \sin\alpha - T - m \cdot a = 0,$

$N - G \cdot \cos\alpha = 0,$

$T = N \cdot f.$

Obr. 40

Dosazení do pohybové rovnice:

$$\underline{F - mg \cdot \sin\alpha - mg \cdot f \cdot \cos\alpha - m \cdot a = 0}.$$

Z této pohybové rovnice lze opět řešit kteroukoli veličinu jako neznámou.

Diskutujme nyní případ, že **velikost síly F je 0**:

$$F = mg \cdot \sin\alpha + mg \cdot f \cdot \cos\alpha + m \cdot a = 0.$$

Pro zrychlení pak plyne:

$$\underline{a = -g \cdot (\sin\alpha + f\cos\alpha)}.$$

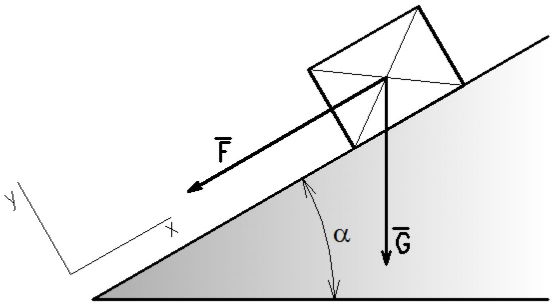
Znamená to, že těleso se pohybuje **zpožděným pohybem**, tj. bylo vrženo vzhůru po nakloněné rovině s počáteční rychlostí v_0 a jeho rychlost klesá podle vztahu známého z kinematiky:

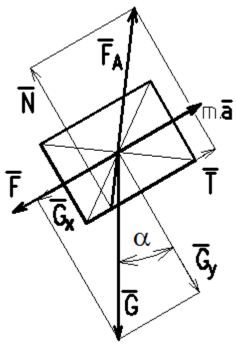
$$v = v_0 - a \cdot t, \text{ případně } v = \sqrt{v_0^2 - 2as}.$$

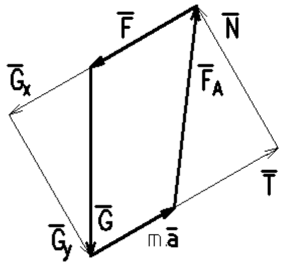
Řešení problému pomocí **energetické metody** pouze naznačíme:

$$(F - mg \cdot \sin\alpha - T) \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2.$$

b) pohyb dolů:







Obr. 41
Obr. 42
Obr. 43

Pohybová rovnice $\sum F_{ix} = 0$:

$$F + G \cdot \sin\alpha - T - m \cdot a = 0,$$

$$N - G \cdot \cos\alpha = 0,$$

$$T = N \cdot f.$$

Dosazení do pohybové rovnice:

$$\underline{F + mg \cdot \sin\alpha - mg \cdot f \cdot \cos\alpha - m \cdot a = 0.}$$

Výpočet síly F:

$$F = mg \cdot (f \cdot \cos\alpha - \sin\alpha) + m \cdot a.$$

Je-li síla **F** rovna 0, znamená to, že velikost zrychlení je:

$$a = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)$$

a těleso sjíždí po nakloněné rovině pouze účinkem vlastní tíhy.

Samosvornost nakloněné roviny:
Pro **mez samosvornosti platí** $a = 0$, tedy $(\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) = 0$.
Odtud:

$$f = \tan\varphi = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha\,, \underline{\alpha = \varphi}.$$

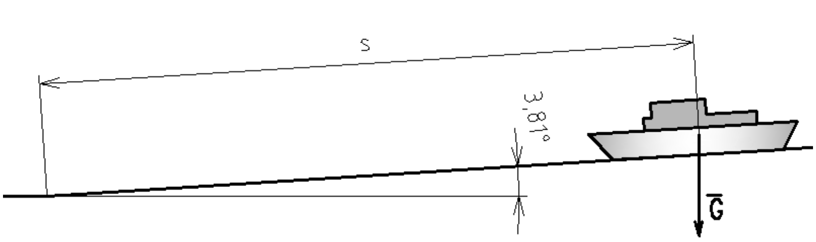
Úhel sklonu nakloněné roviny se rovná třecímu úhlu. Na mezi samosvornosti je těleso buď v klidu, nebo se samovolně pohybuje pohybem rovnoměrným[1].

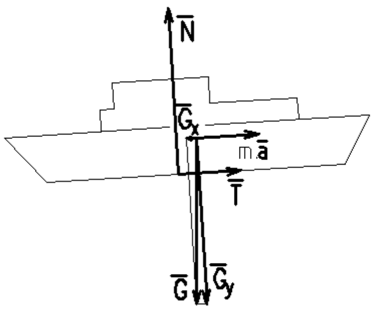
Je-li nakloněná rovina **samosvorná**, síla **F** musí působit jednoznačně dolů. U **nesamosvorné** nakloněné roviny mohou nastat případy, že síla působí dolů a těleso urychluje vedle složky síly tíhové, nebo že působí proti smyslu pohybu (brzdná síla) a těleso pak klesá s menším zrychlením, případně klesá pohybem zpožděným.

Příklad:

Námořní loď o hmotnosti m = 5.10[6] kg se pohybuje při spouštění na vodu po skluzu se sklonem α = 3,81°. Skluz je dlouhý s = 90 m. Ověřte, zda je sklon skluzu dostatečný pro samovolný pohyb lodi při součiniteli tření 0,05, určete zrychlení pohybu lodi, konečnou rychlost na konci skluzu a kinetickou energii na konci. Porovnejte řešení d´Alembertovým pricipem a energetickou metodou.

Obr. 44





Obr. 45
Obr. 46

Řešení (d´Alembertův princip):
Síly v obrázku nejsou kresleny v měřítku. Souřadná osa x bude rovnoběžná s nakloněnou rovinou a pohybová rovnice bude ve tvaru $\sum F_{ix} = 0$. Nejprve ověříme dostatečnost sklonu:

$\varphi = \tan^{-1} 0{,}05 = 2{,}86° < \propto$, třecí úhel je menší než sklon, úhel sklonu je tedy dostatečný.

[1] V pohybové rovnici bude zrychlení rovno 0 a pohybová rovnice přejde ve statickou podmínku rovnováhy. Podmínka rovnováhy je podobným speciálním případem obecného d´Alembertova principu jako rovnice II. pohybového zákona.

Pohybová rovnice a další podmínky:
$mg \cdot \sin\alpha - T - ma = 0,\ N - mg \cdot \cos\alpha = 0,\ T = N \cdot f,$

$mg \cdot \sin\alpha - mg \cdot f \cdot \cos\alpha - ma = 0.$

Zrychlení:
$a = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) = 9{,}81 \cdot (\sin 3{,}81 - 0{,}05 \cdot \cos 3{,}81) = \underline{0{,}162\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})}.$

Konečná rychlost:
$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0{,}162 \cdot 90} = \underline{5{,}4\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$

Kinetická energie:
$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 5{,}4^2 = \underline{72{,}9 \cdot 10^6\ (\mathrm{J})}.$$

Řešení (energetická metoda):

$$(mg \cdot \sin\alpha - T) \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Zbylé rovnice jsou stejné.

$$(mg \cdot \sin\alpha - mg \cdot f \cdot \cos\alpha) \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Rychlost:
$v = \sqrt{2 \cdot s \cdot (g \cdot \sin\alpha - g \cdot f \cdot \cos\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 90 \cdot 9{,}81 \cdot (\sin 3{,}81 - 0{,}05 \cdot \cos 3{,}81)} =$
$\underline{= 5{,}4 (m \cdot s^{-1})}.$

Zrychlení:
$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{5{,}4^2}{2 \cdot 90} = \underline{0{,}162\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})}.$$

Výpočet kinetické energie je stejný.

Otázky:
1. Jaký je rozdíl mezi pohybem volným a vázaným?
2. Kdy lze těleso řešit jako hmotný bod?
3. Jaké jsou podmínky pro to, aby těleso sjíždělo po skluzu pohybem rovnoměrným a pohybem zrychleným?
4. Jaký je postup při řešení úlohy energetickou metodou? Zavádíme setrvačnou sílu?

8. DYNAMIKA ROTAČNÍHO POHYBU

Obsah této kapitoly:

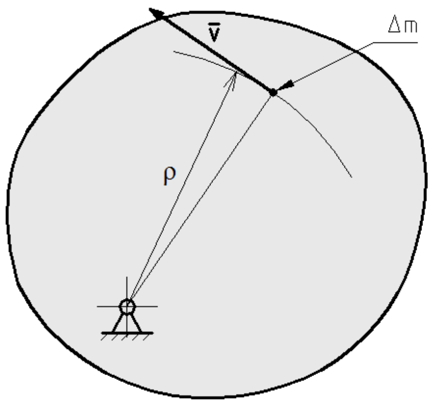
→ *Pojem momentu setrvačnosti tělesa*
→ *Moment setrvačnosti tělesa k ose neprocházející těžištěm, Steinerova věta*
→ *Moment setrvačnosti složeného tělesa*
→ *Základní rovnice dynamiky pro rotační pohyb*
→ *Analogie mezi posuvným a rotačním pohybem*

Pojem momentu setrvačnosti tělesa

Obr. 47

Pro popis setrvačných vlastností rotujícího tělesa a sestavení pohybové rovnice nám nestačí hmotnost. Sami určitě cítíme, že jinak se chová rotující kotouč a jinak např. rotující tyč. Kromě hmotnosti zde hraje úlohu i tvar tělesa a rozložení hmoty kolem osy rotace. Tyto vlastnosti postihuje moment setrvačnosti *I*.

Vztah pro moment setrvačnosti odvodíme pomocí kinetické energie:



Obr. 48

Hmotný bod na obecném poloměru ρ má kinetickou energii:

$$E_k = \frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2,$$

$$v = \rho \cdot \omega.$$

Kinetická energie celého rotujícího tělesa:

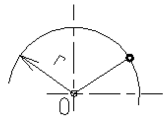
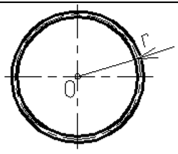
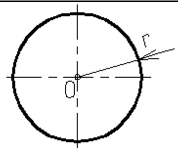
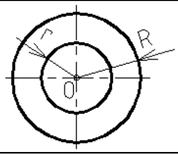
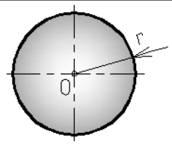
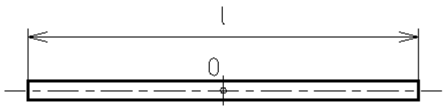
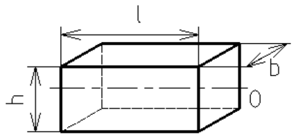
$$E_k = \sum \frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \rho^2 \Delta m = \underline{\frac{1}{2} I_o \cdot \omega^2}.$$

Výraz $\sum \rho^2 \Delta m$ označujeme I_o a nazýváme moment setrvačnosti tělesa k ose O. Jeho jednotkou je kg.m^2.

Moment setrvačnosti počítáme metodami vyšší matematiky[1]. Pro praktickou potřebu využíváme již odvozených vztahů pro momenty setrvačnosti základních geometrických těles.

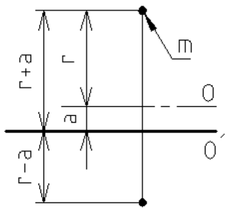
Podle dále uvedených vztahů počítáme momenty setrvačnosti k ose procházející těžištěm tělesa.

[1] Obecný vztah pro moment setrvačnosti spojitého tělesa je $\int \rho^2 dm$ (integrál).

Těleso		Moment setrvačnosti I_o
Hmotný bod		$I_o = m \cdot r^2$
Tenký věnec (střední poloměr *r*)		$I_o = m \cdot r^2$
Rotující kotouč/válec		$I_o = \frac{m \cdot r^2}{2}$
Dutý válec		$I_o = m \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}$
Koule		$I_o = \frac{2}{5} m \cdot r^2$
Tyč		$I_o = \frac{m \cdot l^2}{12}$
Hranol (k podélné ose souměrnosti)		$I_o = m \cdot \frac{b^2 + h^2}{12}$

Moment setrvačnosti tělesa k ose neprocházející těžištěm, Steinerova věta

Moment setrvačnosti tělesa k mimotěžišťové ose O' odvodíme na soustavě dvou hmotných bodů rotujících kolem osy, která neprochází jejich těžištěm.



Obr. 49

$$I_{o'} = m \cdot (r - a)^2 + m \cdot (r + a)^2,$$

$$I_{o'} = m \cdot (r^2 - 2ra + a^2) + m \cdot (r^2 + 2ra + a^2) = \underline{2m \cdot r^2 + 2m \cdot a^2}.$$

Obecně: $\underline{I_{o'} = I_o + m \cdot a^2}.$

Moment setrvačnosti k ose neprocházející těžištěm vypočítáme, když k momentu setrvačnosti k ose procházející těžištěm přičteme součin hmotnosti tělesa a druhé mocniny vzdálenosti obou os (Steinerova věta[1]).

Příklad:
Vypočtěte moment setrvačnosti tyče k ose procházející jejím koncem.

Řešení:
Použijeme Steinerovy věty.

$$I_{o'} = I_o + m \cdot a^2 = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot l^2}{12} + \frac{m \cdot l^2}{4} = \underline{\frac{m \cdot l^2}{3}}.$$

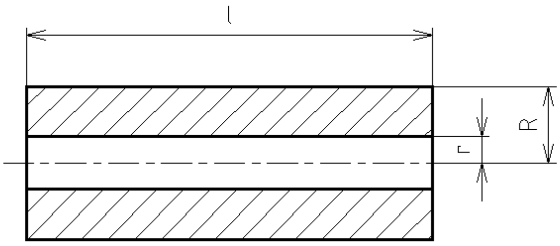
Moment setrvačnosti složeného tělesa

Z odvození momentu setrvačnosti vyplývá, že momenty setrvačnosti lze algebraicky sčítat (moment setrvačnosti vznikl jako součet, resp. jako integrál). Použili jsme to už při odvození Steinerovy věty.

$$I_o = \sum I_{io}.$$

Toho využijeme při výpočtu momentu setrvačnosti složených těles. Důležité je vztahovat momenty setrvačnosti všech částí k téže ose.

Příklad:
Odvoďte vztah pro výpočet momentu setrvačnosti homogenního dutého válce o poloměrech *R* a *r* k ose souměrnosti *O*.



Obr. 50

Řešení:
Moment setrvačnosti vypočítáme jako rozdíl momentů setrvačnosti válců o poloměrech *R* a *r*.
$I_o = I_{o1} - I_{o2}.$

Vyjádříme hmotnosti:

$m_1 = V_1 \cdot \rho = \pi \cdot R^2 \cdot l \cdot \rho,$

$m_2 = V_2 \cdot \rho = \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho.$

[1] Podle švýcarského matematika Jakoba Steinera (1796-1863). Vztah byl však znám již podstatně dřív.

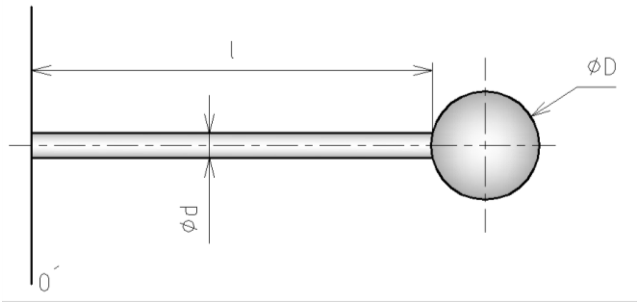
Moment setrvačnosti:

$$I_o = \frac{m_1 \cdot R^2}{2} - \frac{m_2 \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot l \cdot \rho}{2} - \frac{\pi \cdot r^4 \cdot l \cdot \rho}{2} = \pi \cdot l \cdot \rho \cdot \left(\frac{R^4 - r^4}{2}\right) =$$

$$= \pi \cdot l \cdot \rho \cdot \frac{(R^2 + r^2) \cdot (R^2 - r^2)}{2} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot l \cdot \rho \cdot \frac{R^2 + r^2}{2} = \underline{m \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}}.$$

Příklad:

Vypočtěte moment setrvačnosti k ose *O´* tělesa složeného z ocelové koule o průměru D = 60 mm a válcové tyče o průměru d = 20 mm a délce l = 300 mm. Hustota obou částí je ρ = 7800 kg.m^{-3}.



Obr. 51

Řešení:

Moment setrvačnosti složeného tělesa:

$$I_{o'} = I_{o'1} + I_{o'2}.$$

Hmotnosti těles:

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l \cdot \rho = \frac{\pi \cdot 0{,}020^2}{4} \cdot 0{,}3 \cdot 7800 = 0{,}735 \text{ (kg)},$$
$$m_2 = V_2 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}030^3 \cdot 7800 = 0{,}882 \text{ (kg)}.$$

K výpočtu momentů setrvačnosti obou částí potřebujeme Steinerovu větu:

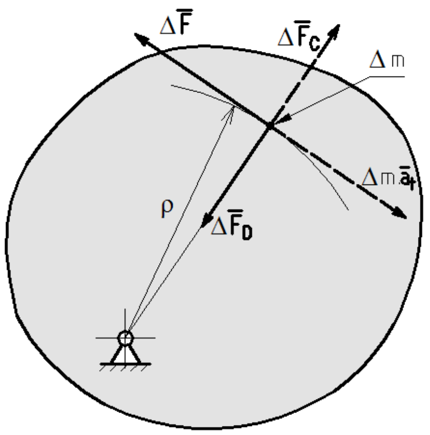
$$I_{o'1} = \frac{m_1 \cdot l^2}{12} + m_1 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_1 \cdot l^2}{3} = \frac{0{,}735 \cdot 0{,}3^2}{3} = 0{,}022 \text{ (kgm}^2\text{)},$$

$$I_{0'2} = \frac{2}{5} m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot (l + R)^2 = \frac{2}{5} \cdot 0{,}882 \cdot 0{,}030^2 + 0{,}882 \cdot 0{,}330^2 = 0{,}096 \text{ (kgm}^2\text{)},$$

$$I_{o'} = I_{o'1} + I_{o'2} = 0{,}0221 + 0{,}0964 = \underline{0{,}118 \text{ (kgm}^2\text{)}}.$$

Základní rovnice dynamiky pro rotační pohyb

Na hmotný bod hmotnosti Δm působí vnější zrychlující síla $\Delta \mathbf{F}$ a dostředivá síla $\Delta \mathbf{F_D}$. Ta je projevem např. vnitřních sil, tedy soudržnosti materiálu. Vnější zrychlující a dostředivé síle přiřadíme podle d´Alembertova principu setrvačné síly, tedy síly $\Delta m\mathbf{a_t}$ (tečná složka setrvačné síla) a $\Delta \mathbf{F_C}$ (setrvačná odstředivá síla).



Obr. 52

Dynamickou rovnováhu hmotného bodu odvozenou z d´Alembertova principu vyjádříme momentovou rovnicí k ose otáčení, přičemž normálové síly (dostředivá a odstředivá) mají moment nulový:

$$\Delta F \cdot \rho - \Delta m \cdot a_t \cdot \rho = 0.$$

Moment vnější zrychlující síly $\Delta F \cdot \rho$ označíme ΔM a tečné zrychlení vyjádříme pomocí zrychlení úhlového (přepokládáme pohyb rovnoměrně zrychlený nebo zpožděný s konstantním zrychlením ε):

$$\Delta M - \Delta m \cdot \varepsilon \cdot \rho^2 = 0.$$

Pro celé těleso pak platí[1]:

$$M - \varepsilon \cdot \sum \rho^2 \cdot \Delta m = 0.$$

Po zavedení již známého momentu setrvačnosti:

$$\underline{M - I_o \cdot \varepsilon = 0.}$$

Rovnice $M - I_o \cdot \varepsilon = 0$ je základní rovnicí dynamiky pro rotační pohyb. Představuje aplikaci d´Alembertova principu. Moment M je výsledný moment vnějších sil působících na těleso a součin $I_o \cdot \varepsilon$ představuje opačně zrychlující moment setrvačných sil[2].

Mezi veličinami a vztahy pro posuvný a otáčivý pohyb platí následující analogie.

Analogie mezi posuvným a rotačním pohybem

Podobný vztah jako mezi pohybovou rovnicí (II. pohybovým zákonem) pro oba druhy pohybů je i mezi ostatními vztahy.

Analogické veličiny			
Posuvný pohyb		**Otáčivý pohyb**	
dráha	s	úhlová dráha	φ
rychlost	**v**	úhlová rychlost	**ω**
(tečné) zrychlení	**a**	úhlové zrychlení	**ε**
normálové zrychlení	$\mathbf{a_n} = 0$	normálové zrychlení	**an**
hmotnost	m	moment setrvačnosti	I_o
síla	**F**	točivý moment	**M**

V případě kinetické energie používáme u rotačního pohybu pojmu rotační energie, analogickou veličinou k impulsu síly je impuls momentu a veličinou analogickou k hybnosti je moment hybnosti. Příslušné vztahy souvisejí stejně jako u posuvného pohybu. Pomocí

[1] Se symbolikou integrálního počtu platí pro spojité těleso $M - \varepsilon \cdot \int \rho^2 \cdot dm = 0$.

[2] Nabízí se název „setrvačný moment“, ale ten zde není na místě, protože setrvačný moment je jiná konkrétní veličina.

momentu hybnosti bychom mohli odvozovat např. pracovní rovnici odstředivého čerpadla nebo řešit pohyb po sepnutí spojky (úloha obdobná rázu při přímočarém pohybu).

Analogické vztahy			
Posuvný pohyb		**Otáčivý pohyb**	
základní rovnice	$F = m \cdot a$	základní rovnice	$M = I_o \cdot \varepsilon$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	rotační energie	$E_r = \frac{1}{2} I_o \cdot \omega^2$
impuls a hybnost	$F \cdot t = m \cdot v - m \cdot v_0$	impuls momentu a moment hybnosti	$M \cdot t = I_o \cdot \omega - I_o \cdot \omega_0$
práce a energie	$F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$	práce a energie	$M \cdot \varphi = \frac{1}{2} I_o \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} I_o \cdot \omega_0^2$

Úlohy řešíme zcela shodnými postupy, které jsme aplikovali u posuvného pohybu.

Příklad:

Letecká vrtule s momentem setrvačnosti I_o = 5 kg.m^2 je poháněna točivým momentem M = 637 Nm. Z otáček n_0 = 500 min^{-1} zrychlí na otáčky n = 3000 min^{-1}. Určete, za jakou dobu se otáčky zrychlily a jaký je maximální výkon motoru P (při otáčkách n).

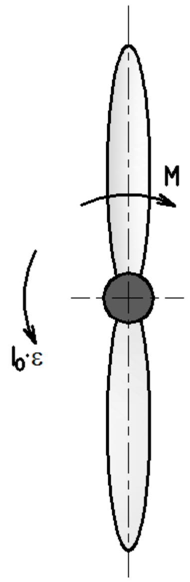
Obr. 53

Řešení:

Pohybová rovnice: $M - I_o \cdot \varepsilon = 0$.

Úhlové zrychlení:

$$\varepsilon = \frac{M}{I_o} = \frac{637}{5} = 127{,}4\ (\mathrm{s}^{-2}).$$



Výpočet úhlových rychlostí: $\omega_0 = 2\pi \cdot n_0 = 2\pi \cdot 8{,}333 = 52{,}36\ (\mathrm{s}^{-1})$,

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot 50 = 314{,}16\ (\mathrm{s}^{-1}).$$

Výpočet času z úhlového zrychlení:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{314{,}16 - 52{,}36}{127{,}4} = \underline{2{,}05\ (\mathrm{s})}.$$

Rychlejší řešení se nabízí na základě přímého využití vztahu mezi impulsem momentu a momentem hybnosti vrtule:

$M \cdot t = I_o \cdot \omega - I_o \cdot \omega_0$,

$$t = I_o \cdot \frac{\omega - \omega_0}{M} = 5 \cdot \frac{314{,}16 - 52{,}36}{637} = \underline{2{,}05\ (\mathrm{s})}.$$

Maximální výkon motoru: $P = M \cdot \omega = 637 \cdot 314{,}16 = 200{,}12 \cdot 10^3\ (W) \doteq \underline{200\ \mathrm{kW}}$.

Příklad:
Vypočtěte moment setrvačnosti setrvačníku, u kterého klesnou otáčky po vykonání práce W = 1260 J z hodnoty n_1 = 320 min^{-1} na n_2 = 254 min^{-1}.
Řešení:
Vykonaná práce je rovna změně rotační (kinetické) energie. Protože setrvačník je zatížen odporem, práci přiřadíme záporné znaménko:

$$-W = \frac{1}{2} I_o \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_o \cdot \omega_1^2.$$

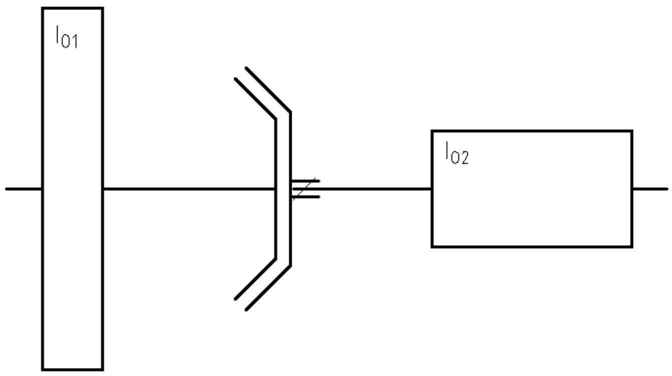
Výpočet úhlových rychlostí: $\omega_1 = 2\pi \cdot n_1 = 2\pi \cdot 5{,}333 = 33{,}51\ (\mathrm{s}^{-1})$,

$$\omega_2 = 2\pi \cdot n_2 = 2\pi \cdot 4{,}233 = 26{,}60\ (\mathrm{s}^{-1}).$$

Moment setrvačnosti:

$$I_o = \frac{-2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{-1260}{26{,}60^2 - 33{,}51^2} = \underline{3{,}034\ (\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2)}.$$

Příklad:
Rotující hmota o momentu setrvačnosti I_{o1}, která se otáčí okamžitou úhlovou rychlostí ω_1, se třecí spojkou spojí s rotorem o momentu setrvačnosti I_{o2}, který je v klidu. Určete okamžitou hodnotu společné rychlosti ω, pokud se oba rotory otáčejí volně bez přívodu energie.



Obr. 54

Řešení:
Úloha je analogická úloze o nepružném rázu těles, který jsme řešili pomocí zákona zachování hybnosti. I zde platí **zákon zachování momentu hybnosti**[1]:

Moment hybnosti soustavy před spojením: $M_{H1} = I_{o1} \cdot \omega_1 + 0.$

Moment hybnosti soustavy po spojení: $M_{H2} = (I_{o1} + I_{o2}) \cdot \omega.$

Z rovnice $M_{H1} = M_{H2}$ plyne:

$$\underline{\omega = \omega_1 \cdot \frac{I_{o1}}{(I_{o1} + I_{o2})}}.$$

Důsledkem snahy o zachování momentu hybnosti je mj. i tzv. Coriolisova síla, která vzniká vždy, když se těleso pohybuje po jiném rotujícím tělese od středu nebo ke středu. Působí tedy i na tělesa pohybující se po povrchu Země. Zvlášť patrné je to u velkých hmotností (mořské nebo vzdušné proudy, veletoky apod.).

9. POUŽITÁ LITERATURA

HIBBELER, R. C. *Engineering Mechanics. Dynamics.* Tenth Edition. Published by Pearson Education, Inc. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, USA.

KUNC, A. aj. *Mechanika III. Hydromechanika, termomechanika, kinematika a dynamika těles.* Praha : SNTL, 1961.

OUWEHAND, J., DROST, A. *Werktuigbouwkunde voor het MTO. Mechanica.* The Hague, The Netherlands : by B. V. Uitgeverij Nijgh & Van Ditmar, 1984.

SZABÓ, I. *Mechanika tuhých těles a kapalin.* Přel. C. Höschl. Praha : SNTL, 1967.

TUREK, I. aj. *Sbírka úloh z mechaniky.* Praha : SNTL, 1975.

WANNER, J. *Sbírka vyřešených úloh z technické mechaniky. III. díl, dynamika a kinematika.* Praha : Československý kompas, 1949.