STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STROJNICKÁ A STŘEDNÍ ODBORNÁ ŠKOLA PROFESORA ŠVEJCARA, PLZEŇ, KLATOVSKÁ 109

Josef Gruber

MECHANIKA III

KINEMATIKA

Vytvořeno v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost CZ.1.07/1.1.30/01.0038 Automatizace výrobních procesů ve strojírenství a řemeslech

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PLZEŇSKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

OBSAH

KINEMATIKA

KINEMATIKA

1. PŘEDMĚT KINEMATIKY, JEJÍ VYUŽITÍ, POHYB

Obsah této kapitoly:

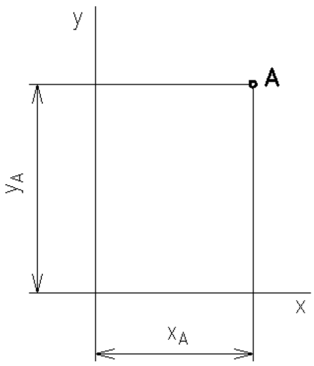
→ *Předmět kinematiky, její využití*
→ *Mechanický pohyb, druhy pohybu*
→ *Trajektorie, dráha, rychlost, zrychlení*
→ *Diagramy pohybu*

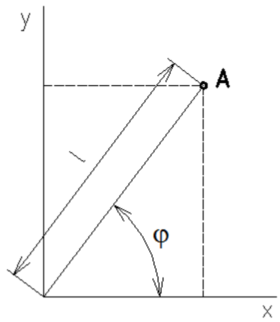
Předmět kinematiky, její využití

Kinematika zkoumá mechanický pohyb hmotných útvarů (hmotných bodů, těles a soustav těles) a jeho změny bez přihlédnutí k příčinám těchto změn, tedy k silám. Kinematika má dvojí význam:
a) podpůrný předmět pro studium dynamiky (dynamika se zabývá změnami pohybového stavu s ohledem na působící síly),
b) samostatná disciplína, využívaná v technické praxi především pro studium mechanismů.

Mechanický pohyb, druhy pohybu

Mechanickým pohybem nazýváme přemisťování hmotného bodu[1] nebo tělesa v prostoru. Polohu bodu nebo tělesa v prostoru určujeme pomocí vhodného souřadného systému. Protože se na této úrovni vzdělávání budeme zabývat především dvourozměrným prostorem (pohyb v rovině), postačí nám pravoúhlé (kartézské) souřadnice a souřadnice polární[2]:





Obr. 1
Obr. 2
Obr. 3

Základní vlastností pohybu je relativnost. Při popisu změny polohy musíme určit vztažné těleso (vztažnou soustavu), vůči němuž změnu polohy popisujeme. Např. dvě souběžně jedoucí vozidla jsou vzhledem k sobě v relativním klidu, vůči Zemi se pohybují.

[1] Předpokládáme, že pojem hmotný bod zná žák z předmětu fyzika. Jedná se o hmotný útvar, u něhož neuvažujeme tvar a rozměry, přisuzujeme mu pouze určitou hmotnost. Jeho použití značně zjednodušuje některé úlohy.
[2] V prostoru pracujeme ještě se souřadnicemi cylindrickými a sférickými.

Druhy pohybu hmotného bodu podle tvaru dráhy:
a) pohyb přímočarý,
b) pohyb křivočarý (jeho zvláštním případem, kterému budeme věnovat velkou pozornost, je pohyb kruhový).

Druhy pohybu tělesa:
a) pohyb translační (posuvný, postupný) – dráhy všech bodů jsou shodné,
b) pohyb rotační (otáčivý) – dráhy bodů tělesa jsou soustřednými kružnicemi,
c) obecný rovinný pohyb – skládá se z pohybů jednoduchých[1].

Při translačním pohybu tělesa jsou dráhy, rychlosti a zrychlení všech bodů tělesa stejné. Proto můžeme při translačním pohybu těleso řešit jako hmotný bod. V této učebnici se při daném rozsahu učiva jedná především o pohyby přímočaré.

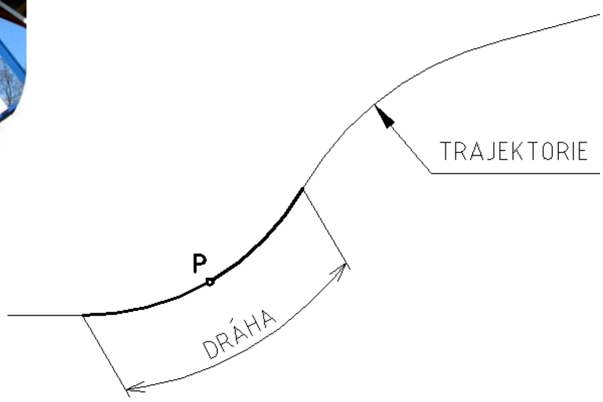
Druhy pohybu podle rychlosti a zrychlení:
a) rovnoměrný pohyb – rychlost je konstantní,
b) nerovnoměrný pohyb – zrychlený a zpožděný.

Trajektorie, dráha, rychlost, zrychlení

Trajektorie, dráha

Trajektorie je množinou okamžitých poloh bodu. Dráha je určitá konkrétní vzdálenost, odpovídající změně polohy po této trajektorii. Označuje se většinou s, ve svislém směru h. Udává se v délkových jednotkách.

Obr. 4

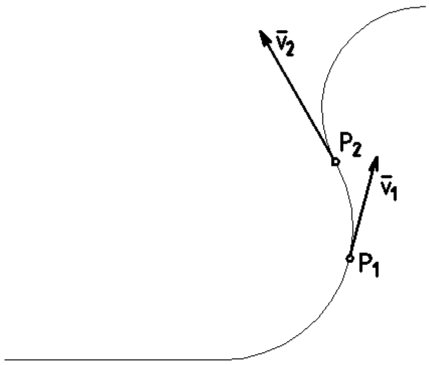


Obr. 5

Rychlost

Vektorová veličina popisující změnu polohy v čase. Lze ji znázornit orientovanou úsečkou, jejíž směr je tečný k trajektorii. Označuje se většinou v nebo c (velikost v, c). Základní jednotkou je $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

[1] Např. valení kola automobilu se skládá z posuvného pohybu osy (unášivý pohyb) a z rotace kolem této osy (relativní pohyb).



Obr. 6

Velikost průměrné (střední) rychlosti:

$$v_{avg} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Velikost okamžité rychlosti:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Čteme: derivace dráhy podle času (časová změna dráhy). Můžeme si ji v představě odvodit z průměrné rychlosti tak, že zmenšujeme přírůstky Δs a Δt až na nekonečně malé hodnoty[1].

Zrychlení

Vektorová veličina popisující změnu rychlosti v čase. Lze ji znázornit orientovanou úsečkou, která na rozdíl od rychlosti nemusí být vždy tečná k trajektorii – příčinou zrychlení je síla; ta může ovlivnit velikost i směr rychlosti (viz pohybové zákony). Zrychlení se označuje a, tíhové zrychlení g (velikost a, g). Základní jednotkou zrychlení je $\mathbf{m \cdot s^{-2}}$.

Velikost průměrného (středního) zrychlení:

$$a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Velikost okamžitého zrychlení:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

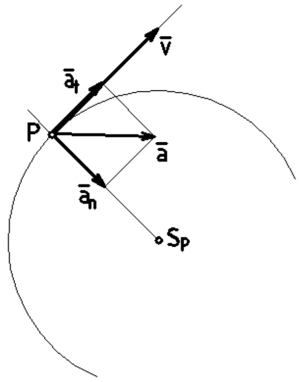
Čteme: derivace rychlosti podle času.

Na této úrovni vzdělávání se budeme zabývat pohyby s konstantním zrychlením (pohyby rovnoměrně zrychlené a zpožděné).

U pohybu křivočarého často rozkládáme výsledné zrychlení např. do směru tečny k trajektorii a do směru normály (kolmice na tečnu) k trajektorii. Hovoříme pak o **tečném** a **normálovém**

[1] Podstata vyšší matematiky (derivací a integrálů) je právě v práci s nekonečně malými veličinami; nekonečně malou změnu veličiny můžeme pokládat za rovnoměrný děj, což usnadní výpočet.

zrychlení. Tečné zrychlení $\mathbf{a_t}$ vyjadřuje změnu velikosti rychlosti, normálové $\mathbf{a_n}$ změnu směru rychlosti. Nejdůležitějším křivočarým pohybem bude pro nás pohyb po kružnici.



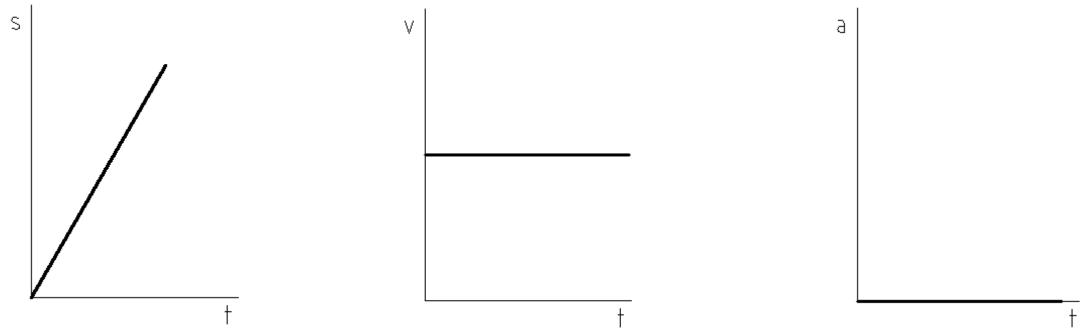
Obr. 7

Diagramy pohybu

Význam grafického znázornění kinematických veličin

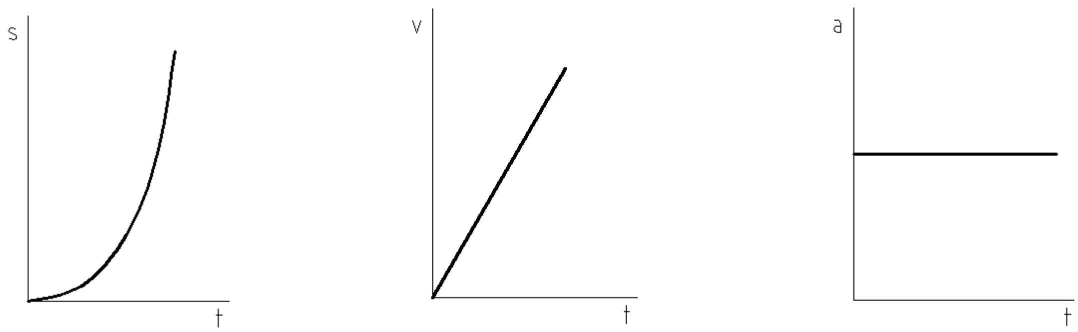
Grafické znázornění poskytuje názornou představu o vzájemné závislosti kinematických veličin a usnadňuje sestavení potřebných rovnic. Dobrá znalost těchto diagramů, které jsou logicky odvoditelné, usnadní analýzu pohybu, odpadá samoúčelné „učení vzorečků“.

Diagramy ***s-t*****,** ***v-t*****,** ***a-t*** **pro pohyby rovnoměrné**



Obr. 8

Diagramy ***s-t*****,** ***v-t*****,** ***a-t*** **pro pohyby rovnoměrně zrychlené**



Obr. 9

Otázky a úkoly:

1. Jaký rozdíl je mezi trajektorií a dráhou?
2. Je vektor rychlosti vždy tečný k trajektorii?
3. Jak převedete rychlost udanou v $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a naopak?
4. Je vektor zrychlení vždy tečný k trajektorii?
5. Zamyslete se nad tím, zda v případě, že hmotný bod má při přímočarém pohybu v daném okamžiku nulovou rychlost, musí být v tomtéž okamžiku také nulové zrychlení.
6. Je pravdivé tvrzení, že letí-li míč po zakřivené trajektorii rovnoměrně, má jeho střed nulové zrychlení?
7. Při jakých pohybech můžeme těleso řešit jako hmotný bod?

2. POHYB ROVNOMĚRNÝ PŘÍMOČARÝ

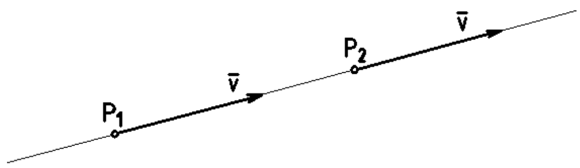
Obsah této kapitoly:

→ *Charakteristika pohybu, základní vztahy, diagramy*

→ *Graficko-početní řešení úloh*

Charakteristika pohybu, základní vztahy, diagramy

Pohyb rovnoměrný přímočarý je nejjednodušším pohybem. Trajektorie je přímá a dráha přibývá rovnoměrně s časem. Průměrná rychlost se rovná rychlosti okamžité. Tímto pohybem se šíří zvuk a světlo, za rovnoměrný přímočarý pohyb pokládáme pohyby při obrábění, při dopravě apod.



Obr. 10

Obr. 11

Základní vztahy:

Rychlost je stálou veličinou:

$$v = \frac{s}{t} = konst.$$

Dráha je přímo úměrná času:

$$s = v \cdot t.$$

Diagram *s-t***:**

Ze vztahu $s = v \cdot t$ vyplývá, že závislost *s-t* lze vyjádřit přímkou, rychlost je konstantou úměrnosti (směrnicí této přímky). Vyšší rychlost vyjádříme strmější přímkou.

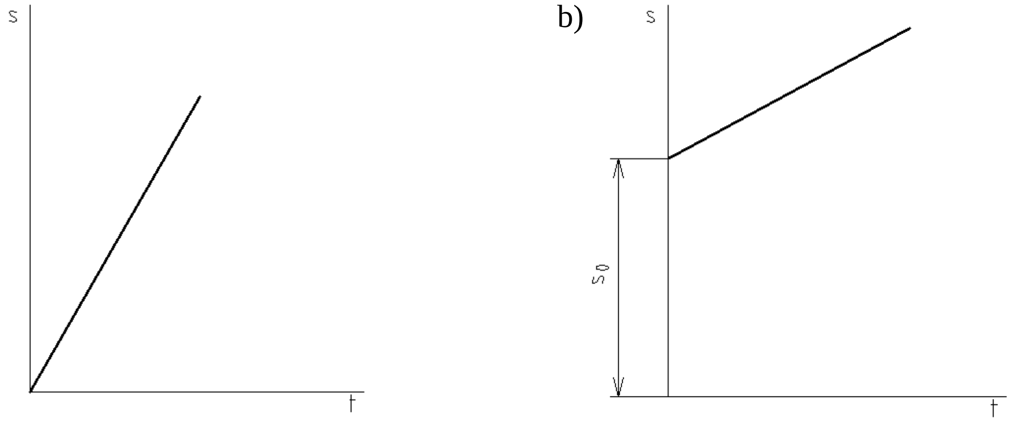
Diagramu *s-t* lze s výhodou využít při grafickém či graficko-početním řešení úloh s tělesy pohybujícími se stejným nebo opačným směrem.

V následujících diagramech je znázorněna závislost dráha-čas pro bod, který se:

a) vzdaluje z našeho stanoviště,

b) vzdaluje od nás z určité vzdálenosti.

a) b)

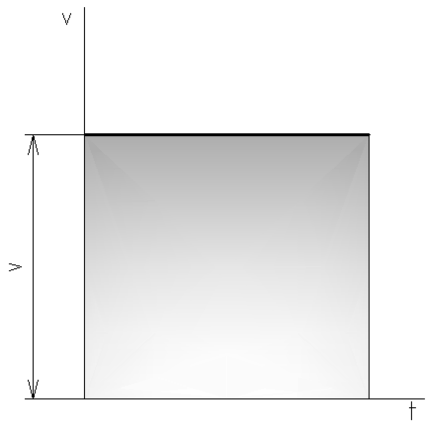


Obr. 12

V případě b) dráhu vypočítáme podle obecného vztahu $s = s_0 + v \cdot t$.

Úkol:
Sestrojte diagram *s-t* pohybu bodu, který se k nám z určité vzdálenosti blíží.

Diagram *v-t*:



Obr. 13

Ze vztahu $s = v \cdot t$ vyplývá, že dráha je v diagramu *v-t* geometricky reprezentována obsahem obdélníka.

*Pravidlo, že plocha diagramu v-*t *vyjadřuje dráhu, platí obecně i pro jiné druhy pohybů.*

Příklad:
Jak dlouho trvá frézování desky dlouhé 600 mm, koná-li stůl posuv 30 mm.min^{-1}?

Řešení:
Pohyb pokládáme za rovnoměrný přímočarý. Délka desky je dráhou, údaj o posuvu je rychlostí rovnoměrného přímočarého pohybu:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{600\ \mathrm{mm}}{30\ \mathrm{mm} \cdot \mathrm{min}^{-1}} = \underline{20\ (\mathrm{min})}.$$

Pozor na správné jednotky! Nejste-li si jisti, raději převeďte veličiny na jednotky základní. Ne vždy je to ovšem praktické.

Příklad:
Vypočítejte, jak je dlouhý vlak, jestliže přejíždí most dlouhý l = 280 m rovnoměrnou rychlostí 36 km.h^{-1} po dobu 1 min.

Řešení:
Hledáme dráhu pohybu rovnoměrného přímočarého (známe rychlost i čas), tato dráha je dána součtem délky mostu a délky vlaku:

$$l + l_{vlaku} = v \cdot t,$$

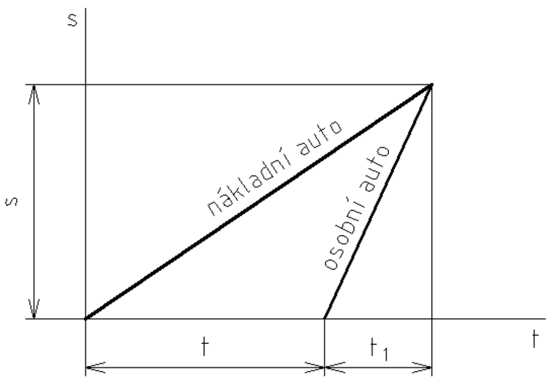
$$l_{vlaku} = v \cdot t - l = 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot 60\ \mathrm{s} - 280\ \mathrm{m} = \underline{320\ (\mathrm{m})}.$$

Rychlost byla převedena na $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ a čas na sekundy.

Graficko-početní řešení úloh

Příklad:
Z místa A vyjel nákladní automobil průměrnou rychlostí v_1 = 50 km.h^{-1}. O t = 30 min později vyjel z téhož místa stejným směrem osobní automobil průměrnou rychlostí v_2 = 80 km.h^{-1}. Za jakou dobu t_1 a v jaké vzdálenosti od místa A dohonil osobní automobil nákladní auto?

Řešení:
Pohyby obou vozidel znázorníme graficky v diagramu *s*-*t*:



Obr. 14

Rovnice pro výpočet hledané doby bude sestavena na základě zjištění, že obě vozidla ujedou stejnou dráhu:

$$s = v_1 \cdot (t + t_1) = v_2 \cdot t_1.$$

Odtud:

$$t_1 = \frac{v_1}{v_2 - v_1} \cdot t = \frac{50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}}{80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} - 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} \cdot 30\ \mathrm{min} = \underline{50\ (\mathrm{min}).}$$

Dráhu určíme z jednoho ze vztahů uvedených výše, např. pro osobní automobil:

$$s = v_2 \cdot t_1 = 22{,}222\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 1800\ \mathrm{s} = 40\,000\ (\mathrm{m}) = \underline{40\ (\mathrm{km})}.$$

Použitím diagramů s-t lze sestavit grafický jízdní řád – grafikon.

Úkol a otázka:

1. Sestrojte diagram *s*-*t* pro pohyb dvou vozidel, která vyjíždějí z různých stanovišť různými rychlostmi v témže nebo v různém čase za sebou nebo proti sobě.
2. Jak je v diagramu *s*-*t* vyjádřena rychlost a jak je v diagramu *v*-*t* vyjádřena dráha?

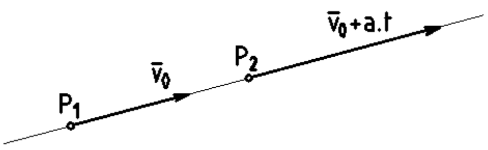
3. POHYB PŘÍMOČARÝ ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ

Obsah této kapitoly:

→ *Charakteristika pohybu*
→ *Pohyb s nulovou počáteční rychlostí*
→ *Pohyb s nenulovou počáteční rychlostí*
→ *Volný pád bez odporu prostředí*

Charakteristika pohybu, základní vztahy, diagramy

Při pohybu přímočarém rovnoměrně zrychleném roste rychlost přímo úměrně s časem. Přírůstek rychlosti, tedy zrychlení, je stálý. Zvláštním případem tohoto pohybu je volný pád bez odporu prostředí, kdy má zrychlení hodnotu tíhového zrychlení. Pohybem rovnoměrně zrychleným modelujeme např. rozjezd dopravního prostředku.



Obr. 15

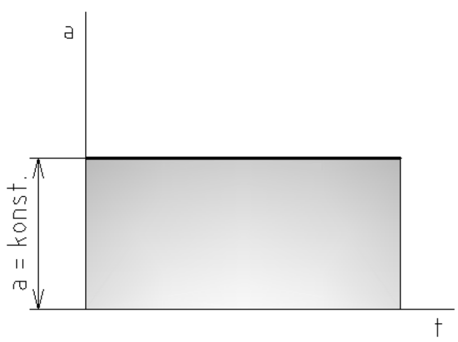
Obr. 16

Pohyb s nulovou počáteční rychlostí $v_0 = 0$:

Zrychlení je dáno poměrem konečné rychlosti dosažené za určitý čas ku tomuto času:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} = konst.$$

Diagram *a*-*t*:



Obr. 17

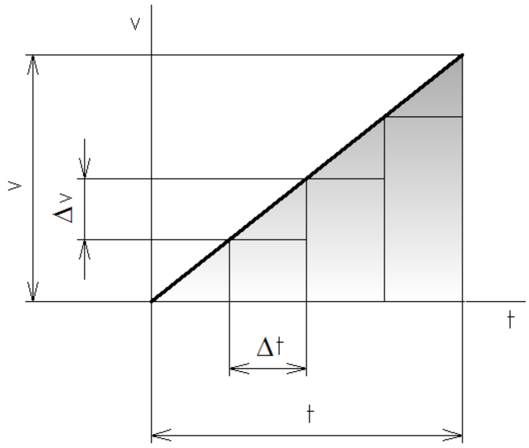
Ze vztahu $v = a \cdot t$, odvozeného ze základního vztahu pro zrychlení, vyplývá, že rychlost je v diagramu *a*-*t* geometricky reprezentována obsahem obdélníka.

Rychlost je vyjádřena vztahem:

$$v = a \cdot t.$$

Ze vztahu vyplývá, že závislost *v-t* lze vyjádřit přímkou, zrychlení je konstantou úměrnosti (směrnicí této přímky). Větší zrychlení vyjádříme strmější přímkou.

Diagram *v-t*:



Obr. 18

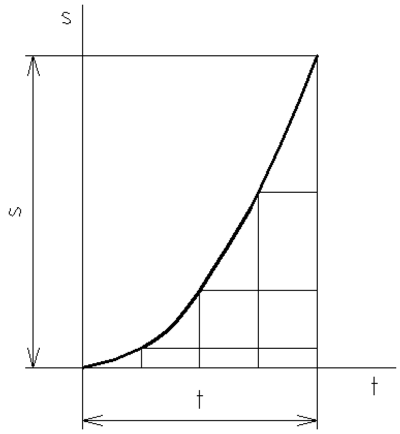
Diagram *s-t*:
Využijeme poznatku z minulé kapitoly, že v diagramu *v-t* je **dráha** reprezentována obsahem plochy. Zde se jedná o trojúhelník[1]:

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t.$$

Po dosazení za *v* ze vztahu pro zrychlení obdržíme pro dráhu:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$

Závislost *s-t* bude tedy parabolická[2]:



Obr. 19

[1] K uvedenému vztahu můžeme dojít i z rovnice pro střední rychlost, kdy $s = v_{avg} \cdot t$. Střední rychlost je rovna $\frac{1}{2} v$, a tedy $s = \frac{1}{2} v \cdot t$.
[2] Směrnice (tangenta směrového úhlu) tečny ke grafu v daném bodě představuje okamžitou rychlost.

Příklad:
Určete rychlost, jaké dosáhne jeřábový vozík, a jak dlouho bude trvat jeho rozjezd, je-li zrychlení při rozjezdu a = 1,6 m.s^{-2} a je-li předepsaná dráha rozjezdu s = 0,12 m.

Řešení:
Jedná se o přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí. Pro tento pohyb můžeme napsat dva základní vztahy:

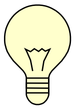
$$a = \frac{v}{t},\quad s = \frac{1}{2} v \cdot t.$$

Obdržíme jednoduchou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou řešíme např. vyjádřením neznámého času z prvního vztahu a dosazením do vztahu druhého:

$$s = \frac{1}{2} v \cdot \frac{v}{a} = \frac{v^2}{2a},$$

pak $$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 0{,}12\ \mathrm{m}} = 0{,}6197\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}}) = \underline{37{,}18\ (\mathrm{m \cdot min^{-1}})},$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{0{,}6197\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}} = \underline{0{,}39\ (s)}.$$

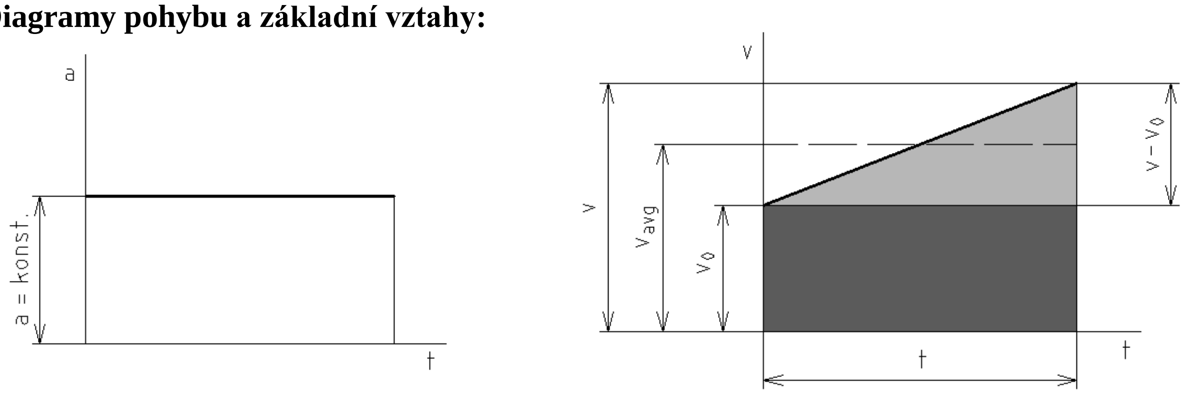


Tento postup uplatníme u všech podobných úloh. Vždy si nakreslete vhodné diagramy a uplatněte znalost geometrické reprezentace kinematických veličin.

Úkol:
1. Sestrojte diagram *s-t* pro pohyb vozidla, které se k nám blíží z určité vzdálenosti.
2. Jak je v diagramu *a-t* vyjádřena rychlost a jak je v diagramu *v-t* vyjádřena dráha?

 Pohyb s nenulovou počáteční rychlostí $v_0 > 0$:

Diagramy pohybu a základní vztahy:



Obr. 20

Obr. 21
Velikost zrychlení je úměrná směrnici (tangentě směrového úhlu) přímky popisující změnu rychlosti v diagramu *v-t* (čas $t_0 = 0$).

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Rychlost je pak dána vztahem:

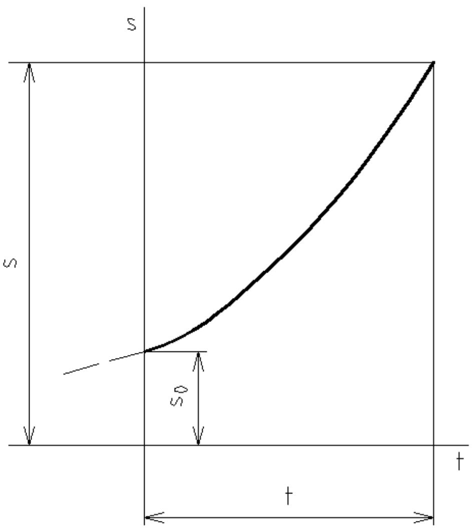
$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Dráha je úměrná obsahu lichoběžníka v diagramu *v-t*. Při výpočtu využijeme střední rychlosti v_{avg}:

$$s = v_{avg} \cdot t = \frac{v + v_0}{2} \cdot t.$$

Obecný vztah pro dráhu bodu vzdalujícího se od nás z místa ve vzdálenosti s_0 pak je (viz diagram):

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$



Obr. 22

Pro řešení úloh potřebujeme dva vztahy: jeden pro zrychlení, druhý pro dráhu v některém z uvedených tvarů. Pro všechny pohyby s konstantním zrychlením vystačíme se dvěma rovnicemi.

Příklad:
Rychlost vlaku $v_1 = 18$ km.h^{-1} se při rovnoměrně zrychlené jízdě zvýšila na rychlost $v_2 = 54$ km.h^{-1} na dráze $s = 150$ m. Jaké bylo zrychlení a jak dlouho trval zrychlující pohyb?

Řešení:
Použijeme vztahy pro zrychlení a pro dráhu:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t},$$
$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t.$$

Vyloučením času obdržíme:

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Rychlosti převedeme na základní jednotky a vypočteme:

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = \frac{15^2\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} - 5^2\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}}{2 \cdot 150\ \mathrm{m}} = \underline{0{,}67\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2})},$$

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{15\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} - 5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{0{,}67\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}} = \underline{15\ (\mathrm{s})}.$$

Úkoly:

1. Porovnejte diagramy *s*-*t* u pohybu rovnoměrně zrychleného s nulovou počáteční rychlostí a s nenulovou počáteční rychlostí. Jak je v *s*-*t* diagramu vyjádřena graficky počáteční rychlost?
2. Vyjádřete:
   a) čas pomocí v, v_0, a
   b) dráhu pomocí v_0, v, a, s_0
   c) dráhu pomocí v, v_0, t, s_0
   d) rychlost pomocí v_0, a, s, s_0

Volný pád bez odporu prostředí

Volný pád bez odporu prostředí je rovnoměrně zrychleným pohybem, při němž má zrychlení hodnotu *g* (tíhové zrychlení). V naší zeměpisné šířce má hodnotu asi 9,81 m.s^{-2}. V praxi často postačí hodnota 10 m.s^{-2}.

Pro volný pád platí **všechny vztahy uvedené u pohybu rovnoměrně zrychleného**, přičemž místo zrychlení *a* píšeme **tíhové zrychlení** *g*.

Užitečným vztahem je velikost rychlosti volného pádu z výšky *h*. Ze základního vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu

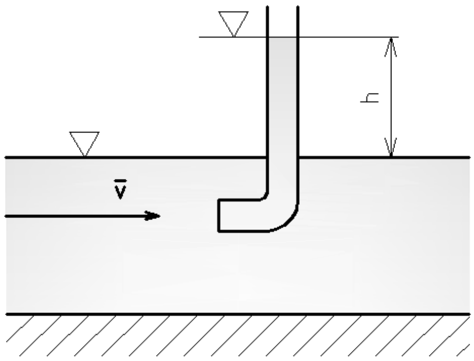
$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

plyne známý vztah (tzv. Torricelliho[1] vzorec):

[1] Evangelista Torricelli (1608-1647), italský fyzik a matematik, žák Galilea Galileiho, mj. objevitel atmosférického tlaku.

$$v = \sqrt{2g \cdot h}.$$

Podle tohoto vztahu vypočítáme např. i teoretickou výtokovou rychlost kapaliny z nádoby s volnou hladinou malým otvorem ve stěně v hloubce h pod hladinou[1]. *Pomocí něho můžeme též např. měřit rychlost proudící kapaliny Pitotovou trubicí:*



Obr. 23

Z uvedeného vztahu vypočítaná výška

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

se nazývá rychlostní výška.

Otázky:

1. Kde a proč bude velikost tíhového zrychlení větší: na pólu nebo na rovníku?
2. Jak byste klasifikovali vrh svislý dolů a jak by vypadal vztah pro rychlost?

[1] Součin $g.h$ představuje měrnou polohovou energii, tj. obecně potenciální energii 1 kg látky. Takto obecně pojatý vztah má svou obdobu např. i v termomechanice.

4. POHYB PŘÍMOČARÝ ROVNOMĚRNĚ ZPOŽDĚNÝ

Obsah této kapitoly:

→ *Charakteristika pohybu, základní vztahy, diagramy*

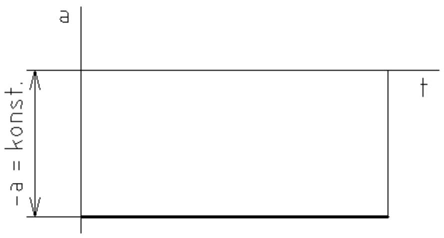
→ *Vrh svislý vzhůru*

Charakteristika pohybu, základní vztahy, diagramy

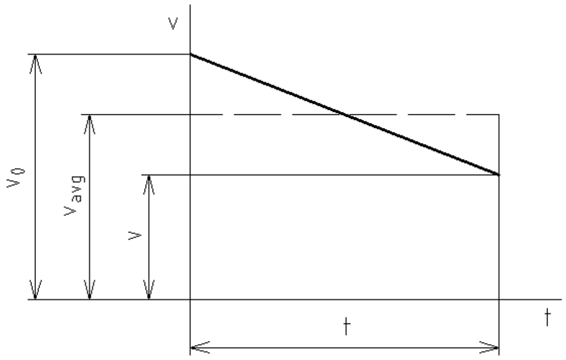
Rychlost klesá rovnoměrně s časem. Zpoždění (záporné zrychlení) má stálou hodnotu a = *konst*. **Za tento druh pohybu obvykle považujeme brzdění vozidla, zarážení piloty, pohyb beranu při kování atd.**

Pro tento druh pohybu platí stejné vztahy jako pro pohyb rovnoměrně zrychlený, ovšem do rovnic se zrychlením dosazujeme hodnotu – a.

a) Pohyb s nenulovou konečnou rychlostí:



Obr. 24



Obr. 25

Zpoždění má velikost

$$-a = \frac{v - v_0}{t}, \qquad a = \frac{v_0 - v}{t}.$$

Rychlost je pak dána vztahem

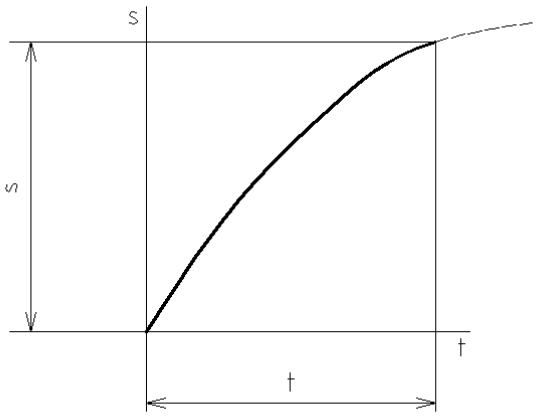
$$v = v_0 - a \cdot t.$$

Dráha je

$$s = v_{avg} \cdot t = \frac{v + v_0}{2} \cdot t,$$

případně (viz diagram s-t)

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$



Obr. 26

b) Pohyb s nulovou konečnou rychlostí – do klidu:
Uvádíme vztahy analogické s pohybem rovnoměrně zrychleným, diagramy již ponecháme na žákovi.

Zpoždění

$$a = \frac{v_0}{t}.$$

Dráha do zastavení

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t, \qquad s = \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$

Příklad:
Jakou brzdnou dráhu má automobil, který veze nezajištěné břemeno, jestliže největší zpoždění smí být a = 0,8 m.s^{-2} (aby nedošlo k posunutí břemene) a počáteční rychlost je v_0 = 15 km.h^{-1}?

Řešení:
Ze základních vztahů pro zpoždění a dráhu plyne:

$$a = \frac{v_0}{t}, \quad s = \frac{1}{2} a \cdot t^2,$$

$$s = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{4{,}1667^2\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}}{2 \cdot 0{,}8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}} = \underline{10{,}85\ (\mathrm{m})}.$$

Vrh svislý vzhůru

Vrhneme-li těleso svisle vzhůru, stoupá se zpožděním g (neuvažujeme odpor prostředí), jedná se tedy o pohyb rovnoměrně zpožděný. Rychlost $v = v_0 - g \cdot t$ klesá až na nulovou hodnotu, poté těleso padá volným pádem. Doba letu vzhůru je stejná jako doba pádu. Opakem je vrh svislý dolů, kdy se jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením g a s nenulovou počáteční rychlostí.

Příklad:
Klec důlního výtahu stoupala vzhůru rychlostí v = 10 m.s^{-1}, když praskl závěs. Zachycovač začal účinkovat 2 s po nehodě. Určete, kde byla v tom okamžiku klec. Tíhové zrychlení uvažujte přibližně 10 m.s^{-2}.

Řešení:
Po poruše závěsu klec stoupala vzhůru po dobu, kterou určíme z podmínky, že konečná rychlost pohybu (vrh svislý vzhůru) je rovna 0:
$v = v_0 - g \cdot t = 0$, tedy $t = \frac{v}{g} = \frac{10}{10} = 1\ (\mathrm{s})$.
Dráha pohybu vzhůru je $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0{,}5 \cdot 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot 1\ s^2 = 5\ (\mathrm{m})$[1].
Za další sekundu klec dosáhla volným pádem rychlosti $v = g \cdot t = 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot 1\ \mathrm{s} =$
$= 10\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})$
a klesla do hloubky $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}}{20\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}} = 5\ (\mathrm{m})$.

Klec byla po 2 s na stejném místě jako v okamžiku nehody.

[1] Po dosazení za čas z rovnice pro rychlost obdržíme známou rychlostní výšku $h = \frac{v^2}{2g}$.

5. ROVNOMĚRNÝ POHYB BODU PO KRUŽNICI, ROTAČNÍ POHYB TĚLESA

Obsah této kapitoly:

→ *Charakteristika pohybu, základní veličiny, diagramy*

→ *Řezná rychlost*

→ *Rotační pohyb tělesa*

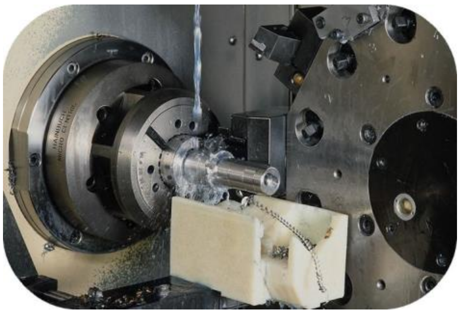
Charakteristika pohybu, základní veličiny, diagramy

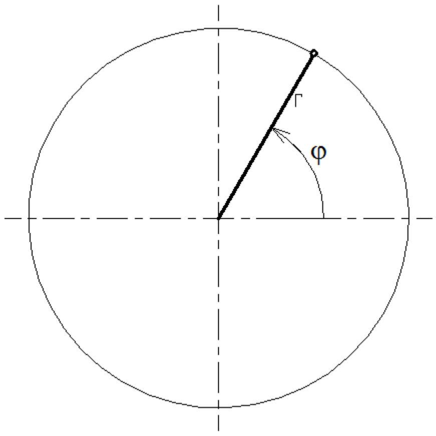
Rovnoměrný pohyb bodu po kružnici je zvláštním případem rovnoměrného pohybu křivočarého. Trajektorií je kružnice, velikost obvodové rychlosti je stálá a její směr je tečný k trajektorii. S tímto pohybem se setkáme při obrábění, pohybuje se tak rotor parní či vodní turbíny atd.

Základní veličiny

Úhlová dráha (úhel pootočení) φ: udáváme ji v míře obloukové a vyjádříme vztah úhlové dráhy a dráhy bodu na kružnici po *i* otáčkách:

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r i}{r} = 2\pi i \text{ (rad)}.$$





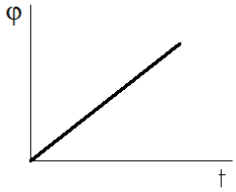
Obr. 27

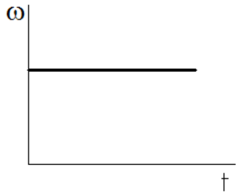
Obr. 28

Vztah mezi dráhou a úhlovou dráhou je tedy $s = r \cdot \varphi$.

Úhlová rychlost ω: vektorová veličina[1] popisující změnu úhlu opsaného průvodičem bodu v čase. Při rovnoměrném pohybu po kružnici je velikost úhlové rychlosti dána vztahem:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \text{ (rad} \cdot \text{s}^{-1})^{2}.$$





Obr. 29

Obr. 30

[1] Na této úrovni vzdělávání nepracujeme s uvedenými veličinami jako s vektory, pouze zaznamenáme smysl otáčivého pohybu.

[2] Můžeme psát pouze s^{-1}, protože radián je bezrozměrná jednotka (poměr dvou délek).

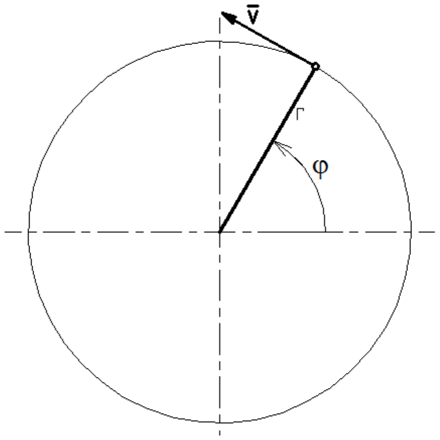
V diagramu φ-t je tedy směrnice přímky úměrná úhlové rychlosti ($\varphi = \omega \cdot t$). Plocha v diagramu ω-t pak odpovídá úhlové dráze. Vztahy pro pohyb po kružnici jsou analogické vztahům pro pohyb přímočarý ($\varphi = \omega \cdot t, s = v \cdot t$ apod.).

Po dosazení za úhlovou dráhu obdržíme úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{2\pi i}{t} = 2\pi n,$$

kde n jsou otáčky (s^{-1}). Jejich převrácenou hodnotou je doba oběhu $T = \frac{1}{n}$ (s).

Obvodová rychlost v: jestliže bod vykoná i otáček v čase t, je velikost obvodové rychlosti dána vztahem („počet délek kružnice za čas“)

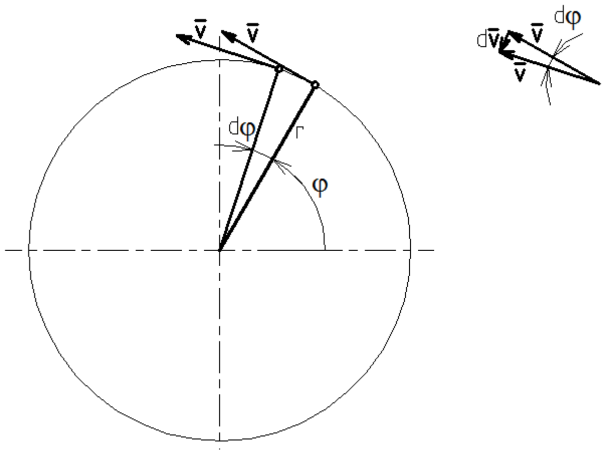


$$v = \frac{\pi d i}{t} = \pi d n = 2\pi r n \ (\mathrm{m \cdot s^{-1}}).$$

Obr. 31

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí je tedy $v = r \cdot \omega$.

Normálové (dostředivé) zrychlení a_n:



$$dv = v \cdot d\varphi,$$

$$a_n = \frac{dv}{dt} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt} = v \cdot \omega\text{[1]},$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2.$$

Obr. 32

Normálové zrychlení je důsledkem působení dostředivé síly, která udržuje těleso na zakřivené dráze. Bez jejího působení by se těleso pohybovalo rovnoměrně přímočaře.

[1] Výraz lze upravit buď dosazením $\frac{v}{r}$ za ω, nebo $r \cdot \omega$ za v.

Příklad:
Kotouč o poloměru r = 140 mm se otáčí rovnoměrně kolem své osy. Určete, kolikrát se kotouč otočí kolem osy, obvodovou rychlost, úhlovou rychlost, otáčky a normálové zrychlení bodů na obvodu, jestliže za čas t = 21 s opíše každý bod na obvodu kotouče úhel φ = 6340°.

Řešení:
Zadaný úhel před dalšími výpočty převedeme: $\varphi_{rad} = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi = \frac{\pi}{180°} \cdot 6340° =$
$= 110{,}66\ (\mathrm{rad})$.
Počet otočení: $i = \frac{\varphi}{360°} = \frac{6340°}{360°} = \underline{17{,}611\ (\mathrm{ot})}$.
Otáčky: $n = \frac{i}{t} = \frac{17{,}611}{21\ s} = \underline{0{,}839\ (\mathrm{s}^{-1})}$.
Úhlová rychlost: $\omega = \frac{\varphi}{t} = 2\pi n = 2\pi \cdot 0{,}839\ \mathrm{s}^{-1} = \underline{5{,}27\ (\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1})}$.
Obvodová rychlost: $v = r \cdot \omega = 0{,}070\ \mathrm{m} \cdot 5{,}27\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \underline{0{,}369\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})}$.
Normálové zrychlení: $a_n = r \cdot \omega^2 = 0{,}070\ \mathrm{m} \cdot 5{,}27^2\ \mathrm{rad}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} = \underline{1{,}944\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2})}$.

Řezná rychlost

Řezná rychlost při obrábění je definována jako délka třísky za časovou jednotku. Při rotačním pohybu (soustružení, broušení) je řezná rychlost rychlostí obvodovou. Udává se v m.min^{-1}.

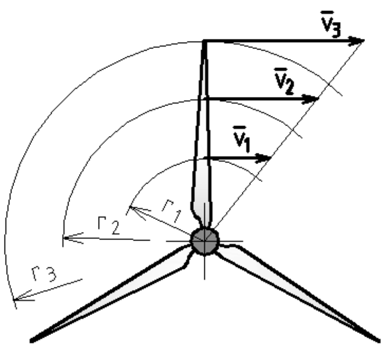
Příklad:
Brusný kotouč má průměr D = 320 mm. Řezná rychlost je v = 1500 m.min^{-1}. Určete otáčky n.

Řešení:
Z rovnice pro obvodovou rychlost vyjádříme otáčky. Pozor na dosazování ve správných jednotkách (rychlost převedeme na m.s^{-1}, průměr kotouče na m):

$$n = \frac{v}{\pi \cdot D} = \frac{25\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi \cdot 0{,}32\ \mathrm{m}} = 24{,}86\ (\mathrm{s}^{-1}) \doteq \underline{1500 (\mathrm{min}^{-1})}.$$

Rovnoměrný rotační pohyb tělesa

Jednotlivé body tělesa se pohybují po soustředných kružnicích stálými rychlostmi, kromě bodů na ose rotace. Jejich úhlové rychlosti jsou stejné.



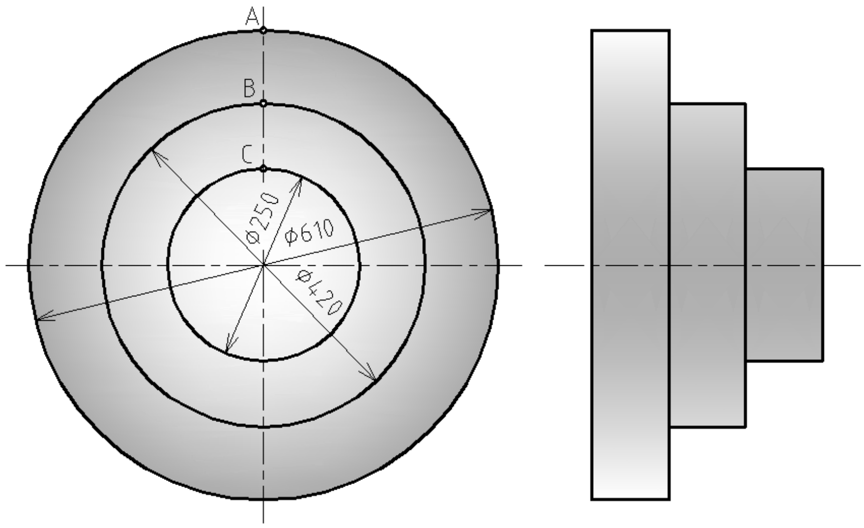
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3,\ \ tedy\ \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_3}{r_3},$$

$$v_1 : v_2 : v_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

Obr. 33
Obr. 34

Mezi rychlostmi a poloměry je přímá závislost, rychlost roste s poloměrem podle přímky, která prochází stálou osou rotace.

Příklad:
Otáčky třístupňové řemenice jsou n = 540 min^{-1}. Určete obvodové rychlosti jednotlivých řemenic a rychlost úhlovou, jestliže průměry řemenic jsou d_1 = 250 mm, d_2 = 420 mm, d_3 = 610 mm.



Obr. 35

Řešení:
Úhlová rychlost je pro všechny body mimo osu řemenice stejná:

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot \frac{540\ \text{min}^{-1}}{60} = \underline{56{,}5\ (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})}.$$

Obvodové rychlosti se mění podle přímky $v = \omega \cdot r$:
$v_A = 56{,}5\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0{,}305\ \text{m} = \underline{17{,}2\ (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})}$; $v_B = 56{,}5\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0{,}210\ \text{m} =$
$= \underline{11{,}9\ (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})}$; $v_C = 56{,}5\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0{,}125\ \text{m} = \underline{7{,}06\ (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})}$.

Otázky:
1. Při jakém druhu pohybu je normálové zrychlení nulové?
2. Může na pohybujícím se tělese existovat bod s nulovou rychlostí?
3. Pokud je odpověď na druhou otázku ano, musí takový bod být vždy bodem tělesa?[1]
4. Co mají společného body tělesa, které mají stejnou obvodovou rychlost?
5. Je správné nebo nesprávné toto tvrzení: body tělesa, které mají stejnou úhlovou rychlost, vždy leží na stejném poloměru?

[1] Představte si např. rotující prstenec.

6. ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A ZPOŽDĚNÝ POHYB BODU PO KRUŽNICI, POHYB TĚLESA

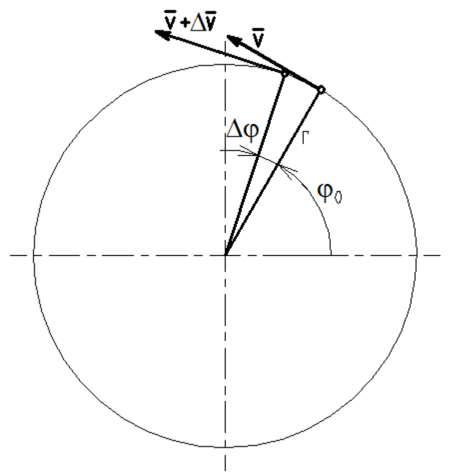
Obsah této kapitoly:

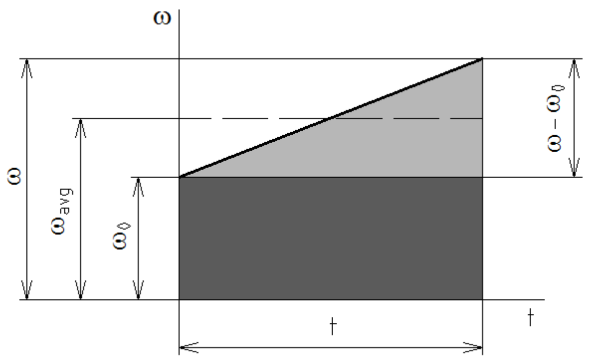
→ *Pohyb rovnoměrně zrychlený*

→ *Pohyb rovnoměrně zpožděný*

Pohyb rovnoměrně zrychlený

U rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici je přírůstek obvodové i úhlové rychlosti konstantní, závislý na čase. Přírůstek obvodové rychlosti vyjadřujeme tečným zrychle-ním a_t, přírůstek úhlové rychlosti vyjadřujeme úhlovým zrychlením ε (rad.s^{-2}). S tímto pohybem se setkáme např. při rozběhu rotačních strojů.





Obr. 36

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r \cdot \varepsilon.$$

Pro tento pohyb platí obdobné vztahy jako pro pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený, zrychlení ve vztazích nahradíme tečným zrychlením:

Veličina	**Pohyb s počáteční rychlostí v_o**	**Pohyb z klidu**
Velikost tečného zrychlení a_t	$a_t = \frac{v - v_0}{t}$	$a_t = \frac{v}{t}$
Dráha s	$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t;\quad v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$	$s = \frac{1}{2} v \cdot t;\ \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$
Vel. okamžité obvodové rychlosti v	$v = v_0 + a_t \cdot t$	$v = a_t \cdot t$
Vel. úhlového zrychlení ε	$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$	$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$
Vel. okamžité úhlové rychlosti ω	$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$	$\omega = \varepsilon \cdot t$
Úhlová dráha φ	$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t;\ \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$	$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2$

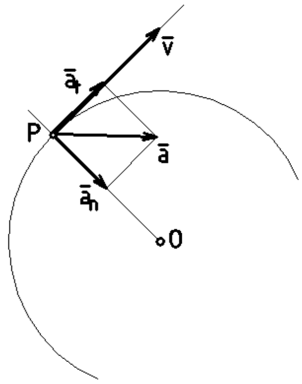
U pohybů rotačních používáme spíše úhlové veličiny, které nezávisí na poloměru. V diagramu ω-t odpovídá obsah plochy úhlové dráze, směrnice přímky pak úhovému zrychlení.

Vztahy mezi metrickými a úhlovými veličinami:

$$s = \varphi \cdot r,$$
$$v = \omega \cdot r,$$
$$a_t = \varepsilon \cdot r.$$

Připomeňme ještě normálové zrychlení:

$$a_n = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r}.$$



Obr. 37

Výsledné zrychlení je dáno vektorovým součtem a_t a a_n:

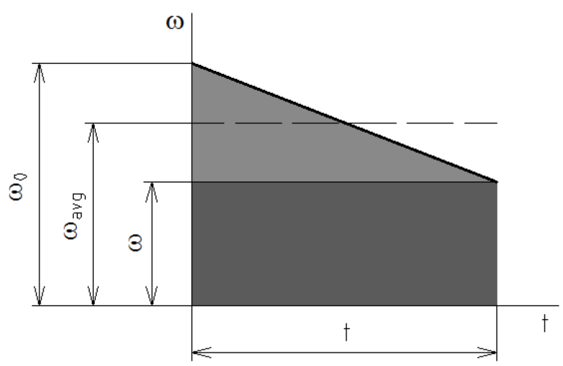
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

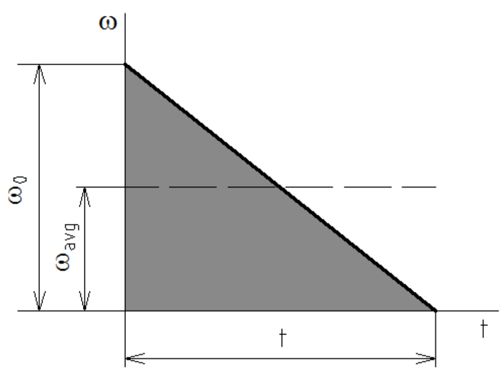
Úhlová dráha je mimo uvedené rovnice dána stejným vztahem jako u rovnoměrného pohybu po kružnici, tj. $\varphi = 2\pi \cdot i$, *kde i je počet otočení (2π je úhel v radiánech opsaný průvodičem za 1 otáčku).*

Pohyb rovnoměrně zpožděný

Při tomto pohybu má také zrychlení konstantní velikost, ale zápornou (zpoždění, úhlové zpoždění). Velikost okamžité úhlové rychlosti je dána vztahem $\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t$. **S tímto pohybem se setkáme při zastavování rotačních strojů, nebo při brzdění.**

Ostatní vztahy jsou stejné jako u rovnoměrně zrychleného pohybu. U pohybu do úplného zastavení dosadíme za velikost konečné rychlosti hodnotu 0.





Obr. 38
Obr. 39

Příklad:
Buben odstředivky má průměr D = 300 mm a na provozní otáčky 10 s^{-1} se roztočí z klidu za 1,5 s. Určete tečné a úhlové zrychlení.

Řešení:
Nejprve určíme druh pohybu: jedná se o rotační pohyb rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí.
Platí:
$a_t = \frac{v}{t}$, kde v je obvodová rychlost.

$$v = \pi D n = \pi \cdot 0{,}3\ \mathrm{m} \cdot 10\ s^{-1} = 9{,}425\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}}),$$

$$a_t = \frac{9{,}425\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{1{,}5\ \mathrm{s}} = \underline{6{,}28\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})},$$

$$\varepsilon = \frac{a_t}{r} = \frac{6{,}28\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}{0{,}5\ \mathrm{m}} = \underline{12{,}56\ (\mathrm{rad \cdot s^{-2}})}.$$

Místo rad.s^{-2} můžeme psát s^{-2}.

Příklad:

Oběžné kolo parní turbíny o středním průměru D_s = 1000 mm se otáčí otáčkami n = 50 s^{-1}. Při odstavení zastavuje se stálým zpožděním a_t = 0,12 m.s^{-2}. Určete, za jak dlouho se turbína zastaví, jaké má úhlové zpoždění a jaké bylo normálové zrychlení na středním průměru při provozních otáčkách.

Řešení:
Jedná se o pohyb rotační rovnoměrně zpožděný do úplného zastavení.
$\omega_0 - \varepsilon \cdot t = 0$

$$\varepsilon = \frac{a_t}{r} = \frac{0{,}12\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}{0{,}5\ \mathrm{m}} = \underline{0{,}24\ (\mathrm{rad \cdot s^{-2}})},$$

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi n}{\varepsilon} = \frac{2\pi \cdot 50\ \mathrm{s^{-1}}}{0{,}24\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}} = 1\,309\ (\mathrm{s}) = \underline{21\ \mathrm{min}\ 49\ \mathrm{s}},$$

$$a_n = r \cdot \omega^2 = r.(2\pi n)^2 = 0{,}5\ \mathrm{m} \cdot (2\pi \cdot 50\ \mathrm{s^{-1}})^2 = \underline{49\,348\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})}.$$

Otázky a úkoly:
1. Uveďte kinematické veličiny, které nejsou závislé na průměru.
2. Jaký je vztah mezi úhlovou a obvodovou rychlostí, mezi úhlovou dráhou a dráhou a mezi úhlovým a tečným zrychlením.
3. Určete pohyby, které mají: a) $a_t \neq 0, a_n = 0$, b) $a_n \neq 0, a_t = 0$.

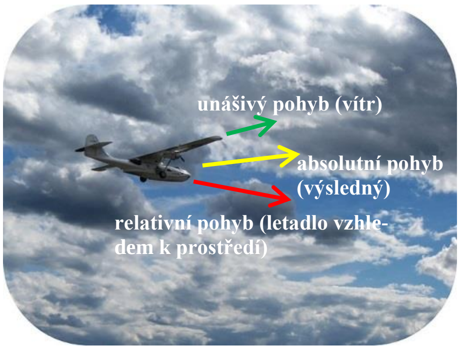
7. SKLÁDÁNÍ PŘÍMOČARÝCH POHYBŮ BODU

Obsah této kapitoly:

→ *Unášivý, relativní a absolutní pohyb*
→ *Pohyby v rovnoběžných přímkách*
→ *Pohyby v různoběžných přímkách*
→ *Relativní pohyb dvou pohybujících se těles*

Unášivý, relativní a absolutní pohyb

Případy, kdy bod[1] koná v rovině či v prostoru současně více pohybů, jsou velmi časté. Cestující, který přechází v jedoucím vlaku, je unášen vlakem a současně se pohybuje vzhledem k jedoucímu vagónu, letadlo letící v bočním větru je snášeno stranou, podobně loď v proudu řeky, kočka mostového jeřábu se pohybuje s jedoucím mostem a současně po něm pojíždí, voda v oběžném kole čerpadla nebo turbíny rotuje s tímto kolem a současně se pohybuje vzhledem k tomuto oběžnému kolu od vstupu k výstupu atd. Tato kapitola směřuje k rozboru a pochopení posledně uvedených technických případů.



Obr. 40

Princip superpozice pohybů

Výsledný (absolutní) pohyb vzhledem k Zemi[2] lze nahradit dvěma současnými a nezávislými pohyby: pohybem unášivým (pohyb vagónu, pohyb větru, viz předchozí příklady) a pohybem relativním (druhotný pohyb cestujícího vzhledem k vagónu, pohyb letadla vzhledem k prostředí apod.).

Vektory rychlostí a zrychlení jednotlivých pohybů skládáme podle pravidel o skládání vektorů (vektorový rovnoběžník nebo trojúhelník, podobně jako při skládání sil).

Indexování veličin

S výjimkou proudových strojů (čerpadel, turbokompresorů a turbín), kde se používá ustálené značení, budeme označovat rychlosti a zrychlení indexem složeným z indexu tělesa vyšetřovaného (na prvním místě) a z indexu tělesa vztažného (na druhém místě). Takže $\mathbf{v}_{12}$ je rychlost tělesa 1 vzhledem k tělesu 2, $\mathbf{v}_{21}$ je rychlost tělesa 2 vzhledem k tělesu 1.

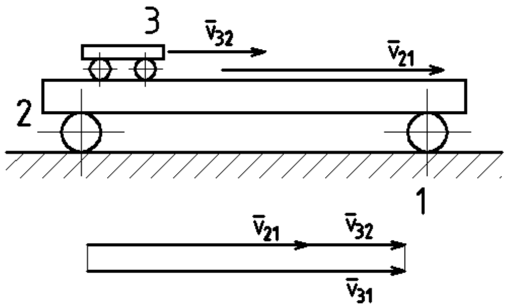
Pohyby v rovnoběžných přímkách

Vyšetřovaným tělesem je vozík 3, hledáme jeho absolutní rychlost vzhledem k soustavě 1 (Země). Unášející vozík 2 je pro menší vozík vztažným tělesem. Protože se vozíky pohybují v rovnoběžných přímkách, můžeme velikosti jejich rychlostí (a zrychlení) algebraicky sčítat. Znaménka volíme v souladu se zvyklostí.

a) Pohyby v souhlasném smyslu:

---

[1] Řešíme pohyby, kdy těleso můžeme považovat za hmotný bod.
[2] Absolutní pohyb neexistuje, tímto termínem označujeme pohyb vzhledem k souřadné soustavě spojené se Zemí.

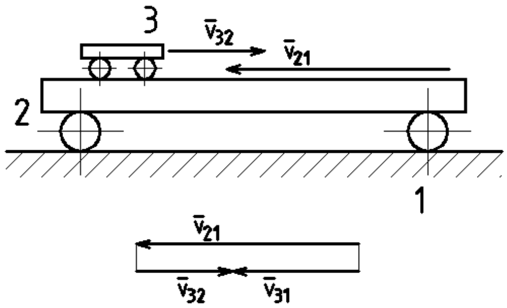


Vektorově: $\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{32}$,
skalárně: $v_{31} = v_{21} + v_{32}$.

Rychlost $\mathbf{v}_{31}$ je **absolutní rychlostí** vozíku 3. Její smysl je podle znaménka stejný jako smysl obou rychlostí, unášivé $\mathbf{v}_{21}$ i relativní $\mathbf{v}_{32}$.

Obr. 41

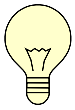
b) Pohyby v opačném smyslu:



Vektorově opět: $\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{32}$,
ale skalárně: $v_{31} = -v_{21} + v_{32}$.

Rychlost $\mathbf{v}_{31}$ by v tomto případě byla záporná, tj. její smysl by se shodoval se smyslem rychlosti $\mathbf{v}_{21}$. Je zřejmé, že tento případ má celkem 3 řešení (rychlost kladná, záporná, případně nulová).

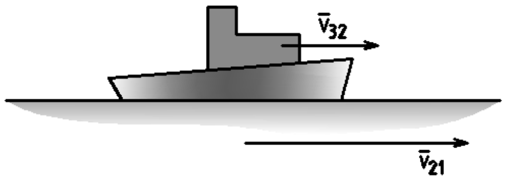
Obr. 42



Dráhu vypočítáme opět jako algebraický součet drah jednotlivých pohybů.

Příklad:
Velikost relativní rychlosti člunu 3 jedoucího po proudu řeky 2 je 4,2 km.h^{-1}. Velikost rychlosti proudu vzhledem ke břehu 1 je 3,5 m.s^{-1}. Jaká je výsledná (absolutní) rychlost člunu?

Řešení:
Rychlosti označíme: unášivá rychlost $\mathbf{v}_{21}$ (velikost v_{21} = 3,5 m.s^{-1}), relativní rychlost $\mathbf{v}_{32}$ (velikost v_{32} = 4,2 km.h^{-1} = 1,17 m.s^{-1}).

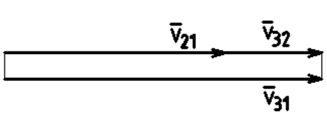


Velikost výsledné absolutní rychlosti:

$$v_{31} = v_{21} + v_{32} = 3{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} + 1{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} =$$

$$= \underline{4{,}67\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})}.$$

Obr. 43



Smysl rychlosti člunu je totožný se smyslem rychlosti proudu.

Obr. 44

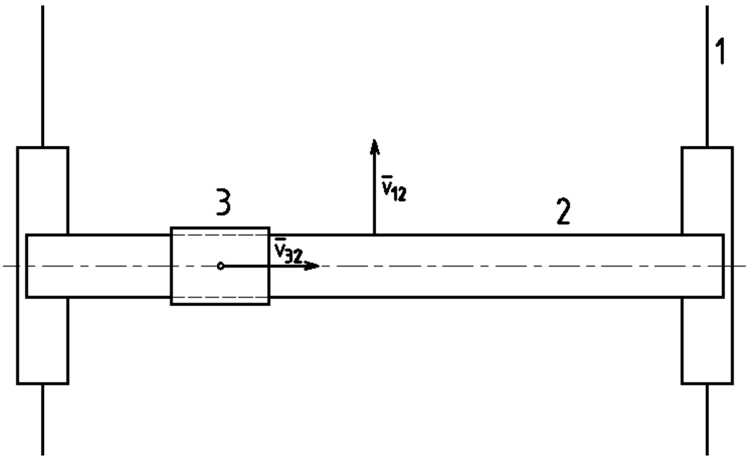
Pohyby v různoběžných přímkách

Rychlosti skládáme pomocí vektorového rovnoběžníka, případně vektorového trojúhelníka. Početní řešení provedeme pomocí vět platných pro trojúhelník.

Příklad:

Most mostového jeřábu se pohybuje stálou rychlostí 0,47 m.s^{-1}. Po mostě jeřábu pojíždí jeřábová kočka stálou rychlostí 0,53 m.s^{-1} vzhledem k mostu. Určete výslednou rychlost břemene zavěšeného na lanu kočky (velikosti rychlosti a směrový úhel). Dále určete dráhy obou dílčích pohybů i dráhy absolutní po 2 sekundách, jestliže pohyby pokládáme za rovnoměrné.

Řešení:



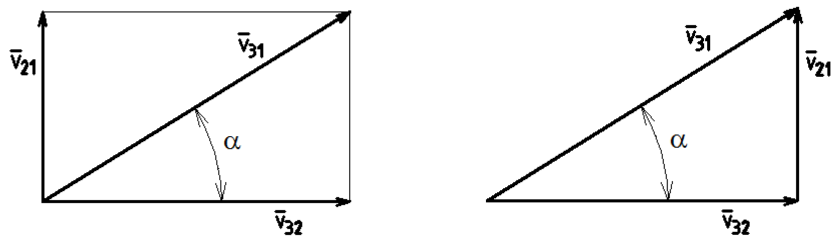
Rychlost mostu $\mathbf{v}_{12}$ je pro břemeno rychlostí unášivou, rychlost kočky s břemenem $\mathbf{v}_{32}$ je rychlostí relativní. Vektorová rovnice:

$$\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{32}.$$

Z rovnoběžníka (nebo trojúhelníka) rychlostí plyne pro velikosti výsledné rychlosti:

$$v_{31}^2 = v_{21}^2 + v_{32}^2,$$

Obr. 45



Obr. 46

$$v_{31} = \sqrt{v_{21}^2 + v_{32}^2} = \sqrt{0{,}47^2\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} + 0{,}53^2\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}} = \underline{0{,}71\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Směrový úhel:

$$\tan\alpha = \frac{v_{12}}{v_{32}} = \frac{0{,}47}{0{,}53} = 0{,}887, \qquad \underline{\alpha = 41{,}6°}.$$

Dráhy dostaneme po vynásobení rychlostí časem 2 s:

$$s_{12} = v_{12} \cdot t = 0{,}47\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 2\ \mathrm{s} = \underline{0{,}94\ (\mathrm{m})},$$
$$s_{32} = v_{32} \cdot t = 0{,}53\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 2\ \mathrm{s} = \underline{1{,}06\ (\mathrm{m})},$$
$$s_{31} = v_{31} \cdot t = 0{,}71\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 2\ \mathrm{s} = \underline{1{,}42\ (\mathrm{m})}.$$

Příklad:

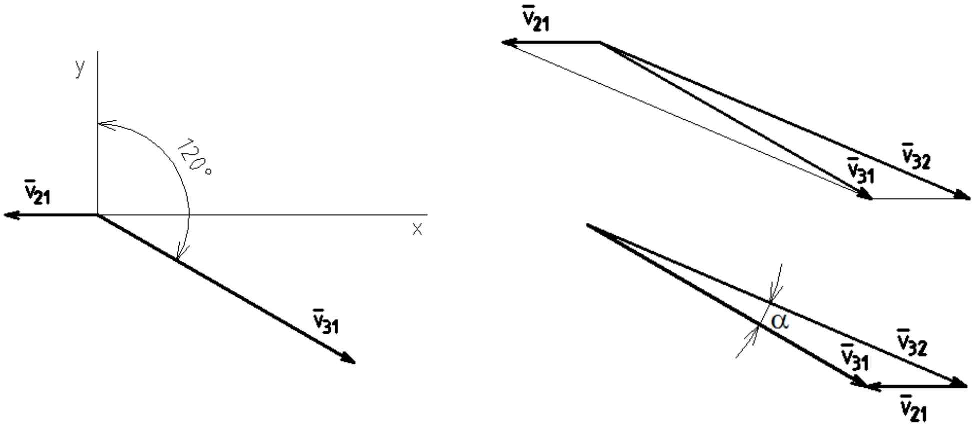
Pilot letadla chce letět skutečnou rychlostí 150 km.h^{-1} s kurzem 120° (od severu), přičemž je letadlo vystaveno rovnoměrnému působení východního větru o rychlosti 7,8 m.s^{-1}. Vypočítejte, jakou opravu kurzu musí pilot započítat a jakou rychlostí vzhledem k okolnímu vzduchu musí letět, aby eliminoval vliv větru (snos).

Obr. 47

Řešení:

Rychlost větru $\mathbf{v}_{21}$ je rychlostí unášivou, zamýšlená rychlost $\mathbf{v}_{31}$ bude rychlostí absolutní. Relativní rychlost $\mathbf{v}_{32}$ vyřešíme z rovnoběžníku nebo trojúhelníku rychlostí.

Početní řešení můžeme provést buď kosinovou a sinovou větou, nebo rozkladem vektorů rychlostí do složek (stejně jako se ve statice skládají a rozkládají síly).



Obr. 48

Úhel sevřený vektory $\mathbf{v}_{21}$ a $\mathbf{v}_{31}$ je 150° a kosinová věta:

$$v_{32}^2 = v_{21}^2 + v_{31}^2 - 2v_{21}v_{31}\cos 150°,$$

$$v_{32} = \sqrt{v_{21}^2 + v_{31}^2 - 2v_{21}v_{31}\cos 150°} =$$

$$= \sqrt{28{,}1^2\ \mathrm{km^2\cdot h^{-2}} + 150^2\ \mathrm{km^2\cdot h^{-2}} - 2\cdot 28{,}1\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\cdot 150\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\cdot\cos 150°} =$$

$$= \underline{175\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})}.$$

Korekce kurzu (sinová věta):

$$\frac{v_{21}}{v_{32}} = \frac{\sin\alpha}{\sin 150°},\ \sin\alpha = \frac{v_{21}}{v_{32}}\sin 150° = \frac{28{,}1\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}{175\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}\sin 150° = 0{,}0803,$$

$\underline{\alpha = 4{,}6°}$, opravený kurz tedy bude přibližně 115°.

Příklad:

Oběžné kolo Francisovy vodní turbíny má vnitřní průměr D = 1,2 m a jeho otáčky jsou n = 102 min^{-1}. Voda opouští oběžnou lopatku absolutní rychlostí 4,8 m.s^{-1} pod úhlem α_2 = 90°. Určete relativní a unášivou rychlost vody na výstupu z oběžného kola a výstupní úhel β_2 lopatek.

Řešení:

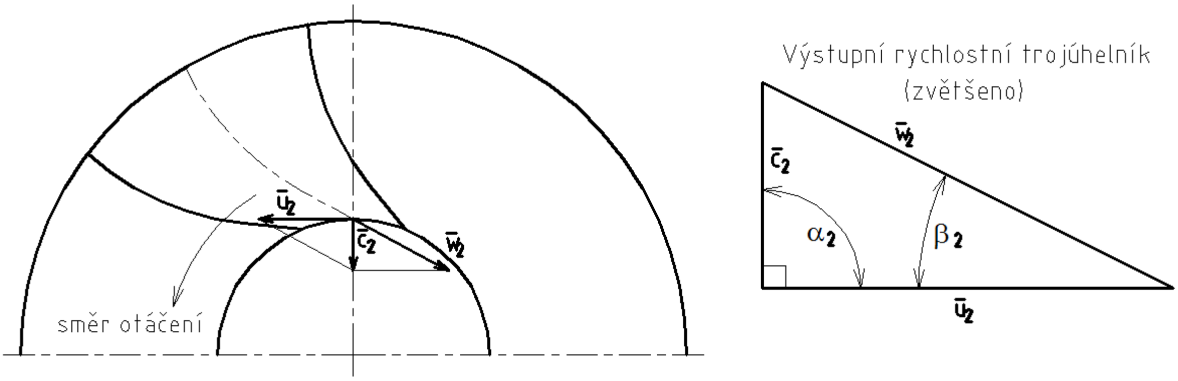
Obr. 49

U proudových strojů se používá následující značení:
c … absolutní rychlost vody,
u … unášivá rychlost (obvodová rychlost oběžného kola),
w … relativní rychlost vody vzhledem k lopatce (k mezilopatkovému kanálu).

Úhly:
α … úhel mezi absolutní a unášivou rychlostí,
β … úhel mezi relativní a unášivou rychlostí.

Indexy:
1 … vstup do oběžného kola,
2 … výstup z oběžného kola.

Řez oběžným kolem (zakresleny pouze dvě lopatky a střední čára mezilopatkového kanálu) a výstupní rychlostní trojúhelník[1]:



Obr. 50

Výpočet:

$$u_2 = \pi D n = \pi \cdot 1{,}2\ \mathrm{m} \cdot 1{,}7\ \mathrm{s}^{-1} = \underline{6{,}41\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})},$$

$$w_2 = \sqrt{u_2^2 + c_2^2} = \sqrt{6{,}41^2\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} + 4{,}8^2\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}} = \underline{8\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})},$$

$$\tan \beta_2 = \frac{c_2}{u_2} = \frac{4{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{6{,}41\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 0{,}75, \qquad \underline{\beta_2 = 36{,}8°}.$$

[1] Voda je unášena ve směru obvodové rychlosti a současně se pohybuje relativní rychlostí, jejíž směr je určen mezilopatkovým kanálem. V této turbíně dochází ke vzrůstu relativní rychlosti při současném poklesu tlaku takže voda působí i reaktivní silou. Absolutní rychlost naopak klesá, protože voda předává kolu energii.

Relativní pohyb dvou pohybujících se těles

Při zjišťování relativní rychlosti, jakou se pohybuje jedno těleso vzhledem k druhému, si představíme, že jako pozorovatelé jsme spojeni se vztažným tělesem. Znamená to, že vzhledem k nám se vztažné těleso nepohybuje („vztažné těleso zastavíme“), což provedeme tak, že

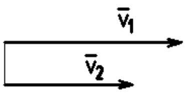
k rychlosti vyšetřovaného tělesa připojíme opačnou rychlost vztažného tělesa. Hledaná relativní rychlost je výslednicí obou rychlostí.

Pro lepší pochopení si představme, že jedeme autem kolem domu a zdá se nám, že dům „ubíhá dozadu“ stejnou rychlostí, jakou jedeme. Jeho relativní rychlost vzhledem k nám obdržíme tak, že k rychlosti domu (nulové) připojíme opačnou rychlost automobilu. Uvedené pravidlo použijeme při řešení úloh, kdy rychlosti objektů jsou rovnoběžné i různoběžné.

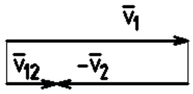
Správnému výpočtu napomůže načrtnuté grafické řešení. Nezapomeneme na správné označení relativních rychlostí.

Příklad:
Po dvoukolejné trati se pohybují rychlík rychlostí o velikosti v_1 = 84 km.h^{-1} a osobní vlak rychlostí o velikosti v_2 = 56 km.h^{-1}. Určete, jaká je relativní rychlost rychlíku vzhledem k osobnímu vlaku, jestliže se vlaky pohybují: a) ve stejném smyslu, b) v opačném smyslu.

Řešení:
Hledanou relativní rychlost označíme $\mathbf{v}_{12}$.
a) Vlaky jedou souhlasně:



K rychlosti vyšetřovaného tělesa (1) přičteme opačnou rychlost vztažného tělesa (2):

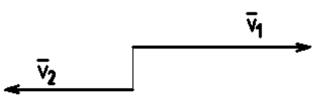


Obr. 51
Obr. 52

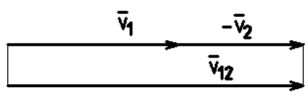
Vektorová rovnice: $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$[1],

skalární rovnice je v tomto případě formálně stejná: $v_{12} = v_1 - v_2$.
$v_{12} = 84\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} - 56\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = \underline{28\ (\mathrm{km \cdot h^{-1}})}$.

b) Vlaky jedou proti sobě:



K rychlosti vyšetřovaného tělesa (1) přičteme opačnou rychlost vztažného tělesa (2):



Obr. 53
Obr. 54

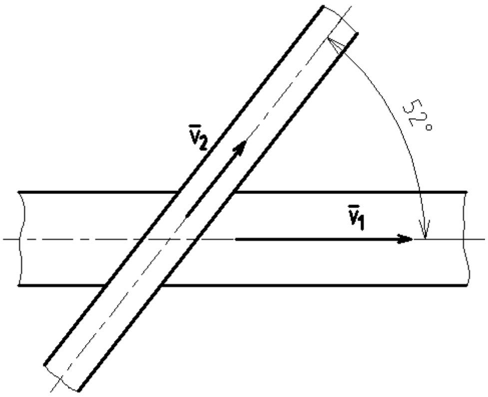
Vektorová rovnice je stejná: $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$,

skalární rovnice: $v_{12} = v_1 + v_2$.
$v_{12} = 84\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} + 56\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = \underline{140\ (\mathrm{km \cdot h^{-1}})}$.

[1] Vlastně $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$.

Příklad:
Po cestě jede automobil stálou rychlostí v_1 = 86 km.h^{-1}. Přes cestu vede nadjezd, po kterém se pohybuje cyklista stálou rychlostí v_2 = 28 km.h^{-1}. Určete relativní rychlost cyklisty vzhledem k automobilu. Obě trasy svírají úhel 52°.

Řešení:



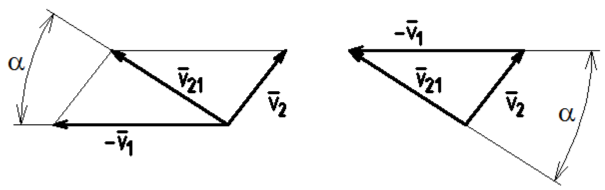
Graficky[1] určíme relativní rychlost (index 21) tak, že k rychlosti vyšetřovaného tělesa (cyklista 2) přičteme opačnou rychlost vztažného tělesa (auto 1).

Vektorová rovnice má opět tvar

$$\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,$$

ale početně musíme velikost relativní rychlosti a její směrový úhel řešit větami platnými pro trojúhelník.

Obr. 55



Kosinová věta:

$$v_{21}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_2v_2\cos\alpha.$$

Obr. 56

$$v_{21} = \sqrt{86^2\ \mathrm{km^2\cdot h^{-2}} + 28^2\ \mathrm{km^2\cdot h^{-2}} - 2\cdot 86\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\cdot 28\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\cdot\cos 52°} =$$

$$= \underline{75{,}2\ \ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})}.$$

Úhel α:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 52°} = \frac{v_2}{v_{21}}, \sin\alpha = \frac{v_2}{v_{21}}\sin 52° = \frac{28}{86}\cdot\sin 52° = 0{,}26, \underline{\alpha = 14{,}9°}.$$

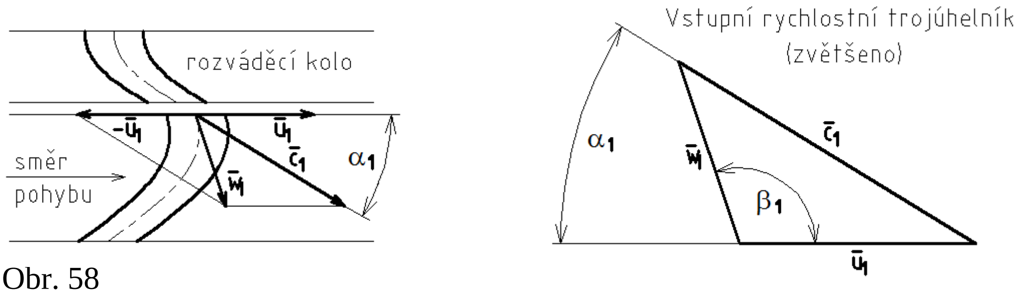
Příklad:
Vnější průměr oběžného kola axiální vodní turbíny[2] je D = 1300 mm, jeho otáčky jsou n = 104 min^{-1}. Voda vstupuje do oběžného kola absolutní rychlostí o velikosti c_1 = 7,46 m.s^{-1} pod úhlem α_1 = 17,5°. Určete vstupní relativní rychlost w_1 a úhel sklonu lopatky β_1.

Řešení:
Z pevného rozváděcího kola, v němž získá kinetickou energii, vystupuje voda absolutní rychlostí $\mathbf{c}_1$.

Obr. 57

[1] Samozřejmě postačí jedno řešení – buď vektorovým rovnoběžníkem, nebo trojúhelníkem.
[2] Na obrázku je rozváděcí a oběžné kolo historické Girardovy turbíny, předchůdkyně turbíny Kaplanovy.

Vstupní úhel oběžné lopatky musí být nastaven tak, aby voda přicházela na lopatku ve směru tečny, lopatka tedy musí sledovat relativní rychlost vody vzhledem k lopatce. Relativní rychlost $\mathbf{w}_1$ určíme tak, že k rychlosti vyšetřovaného tělesa (rychlost vody $\mathbf{c}_1$) přičteme opačnou rychlost vztažného tělesa (unášivá – obvodová rychost lopatky $\mathbf{u}_1$).



Obr. 58

Unášivá rychlost: $u_1 = \pi D n = \pi \cdot 1{,}3\ \mathrm{m} \cdot 1{,}73\ \mathrm{s}^{-1} = 7{,}07\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})$.

Vektorová rovnice: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{u}_1$.

Výpočet velikosti relativní rychlosti:

$$w_1 = \sqrt{c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 u_1 \cos\alpha_1} =$$

$$= \sqrt{7{,}46^2\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} + 7{,}07^2\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} - 2 \cdot 7{,}46\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot 7{,}07\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \cos 17{,}5°} =$$

$$= \underline{2{,}24\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})}.$$

Vstupní úhel oběžné lopatky:

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1} = \frac{c_1}{w_1}, \sin\beta_1 = \frac{c_1}{w_1}\sin\alpha_1 = \frac{7{,}46\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{7{,}07\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} \cdot \sin 17{,}5° = 0{,}317, \underline{\alpha_1 = 18{,}5°}.$$

Otázky a úkoly:

3. Uveďte příklad složeného pohybu a popište unášivou, relativní a absolutní rychlost.
4. Kdy lze rychlosti algebraicky sčítat?
5. Jak se určí relativní rychlost dvou pohybujících se těles?
6. Nakreslete k poslednímu příkladu výstupní rychlostní trojúhelník.

8. SKLÁDÁNÍ ROVNOMĚRNÝCH A NEROVNOMĚRNÝCH POHYBŮ – VRHY

Obsah této kapitoly:

→ *Vrhy a princip superpozice pohybů*
→ *Vrh vodorovný*
→ *Vrh šikmý*
→ *Vrh svislý vzhůru*

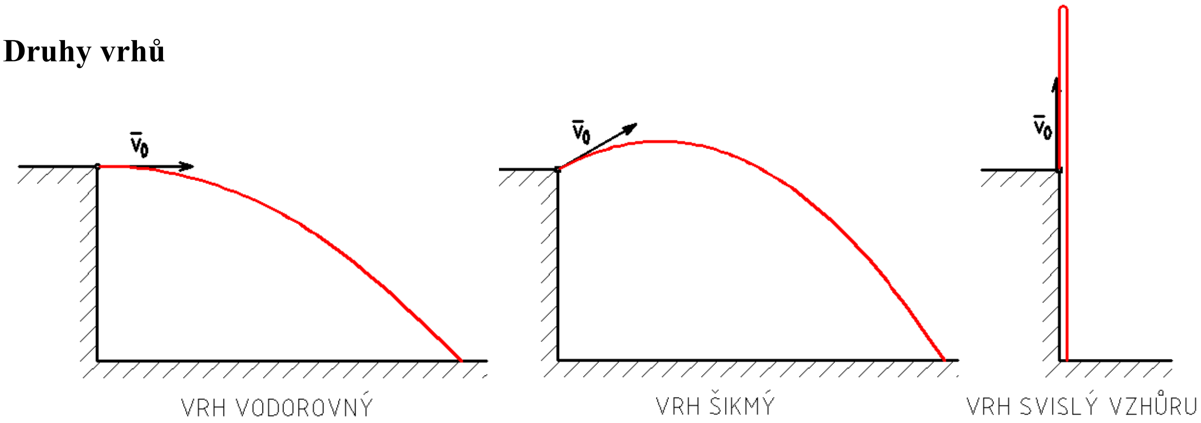
Vrhy a princip superpozice pohybů

Vrhy jsou příkladem pohybů, kdy těleso (bod) koná současně rovnoměrný přímočarý pohyb a volný pád (bez odporu prostředí)[1].

Princip superpozice pohybů

Výsledný (absolutní) pohyb vzhledem k Zemi lze nahradit dvěma současnými a nezávislými pohyby: pohybem rovnoměrným přímočarým, jehož směr je dá směrem počáteční rychlosti, a volným pádem. Výsledná okamžitá rychlost je dána vektorovým součtem rychlostí obou dílčích pohybů.

Druhy vrhů



Obr. 59

Vrh vodorovný

Hmotný bod je vodorovně vržen počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$. Pokud by nepůsobila gravitace, pohyboval by se přímočaře rovnoměrně (nepůsobily by vnější síly, neuvažujeme-li vlivy prostředí). Při pohledu shora (průmět do půdorysny) bychom take pozorovali pohyb rovnoměrný přímočarý. Bokorysem pohybu by byl pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením **g** (volný pád).

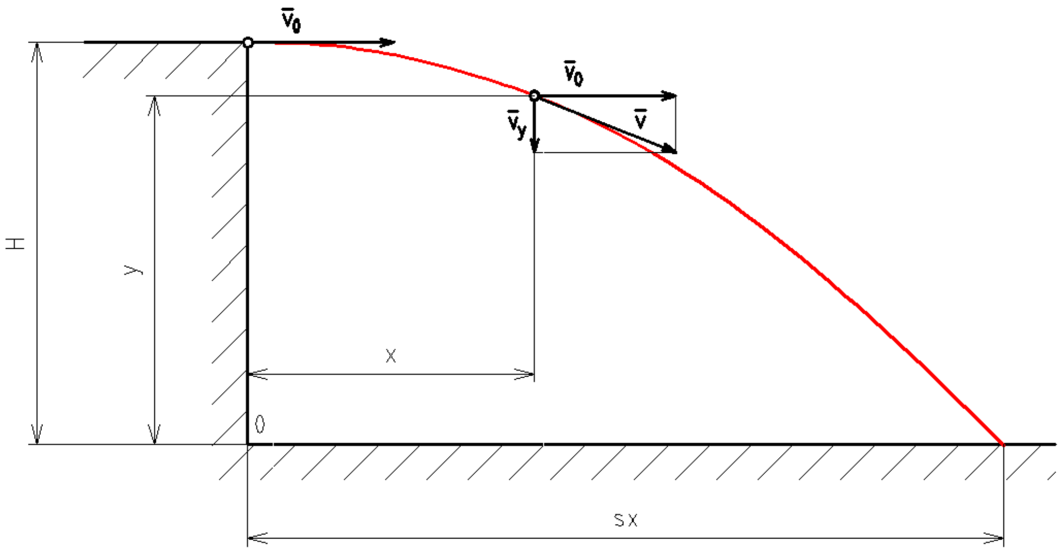
Souřadnice bodu v obecné poloze v čase t:

$$x = v_0 t, v_0 = konst.,$$

$$y = H - \frac{1}{2} g t^2.$$

V okamžiku dopadu platí $y = 0$, což je okrajová podmínka, z níž určíme dobu pádu t_p:

[1] Vlivy prostředí, působící na pohybující se těleso, zahrnuje balistika.



Obr. 60

$$H - \frac{1}{2} g t_p{}^2 = 0, \underline{t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}}.$$

Dostřel:

$$\underline{s_x = v_0 t_p = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}}.$$

Vrh šikmý

Hmotný bod je vržen počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ pod úhlem α k vodorovné rovině. Bez působení gravitace a dalších vnějších sil by se pohyboval rovnoměrně přímočaře šikmo vzhůru. Ve skutečnosti je však jeho pohyb složen z tohoto pohybu a z volného pádu.

Souřadnice bodu v obecné poloze v čase t:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = H + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

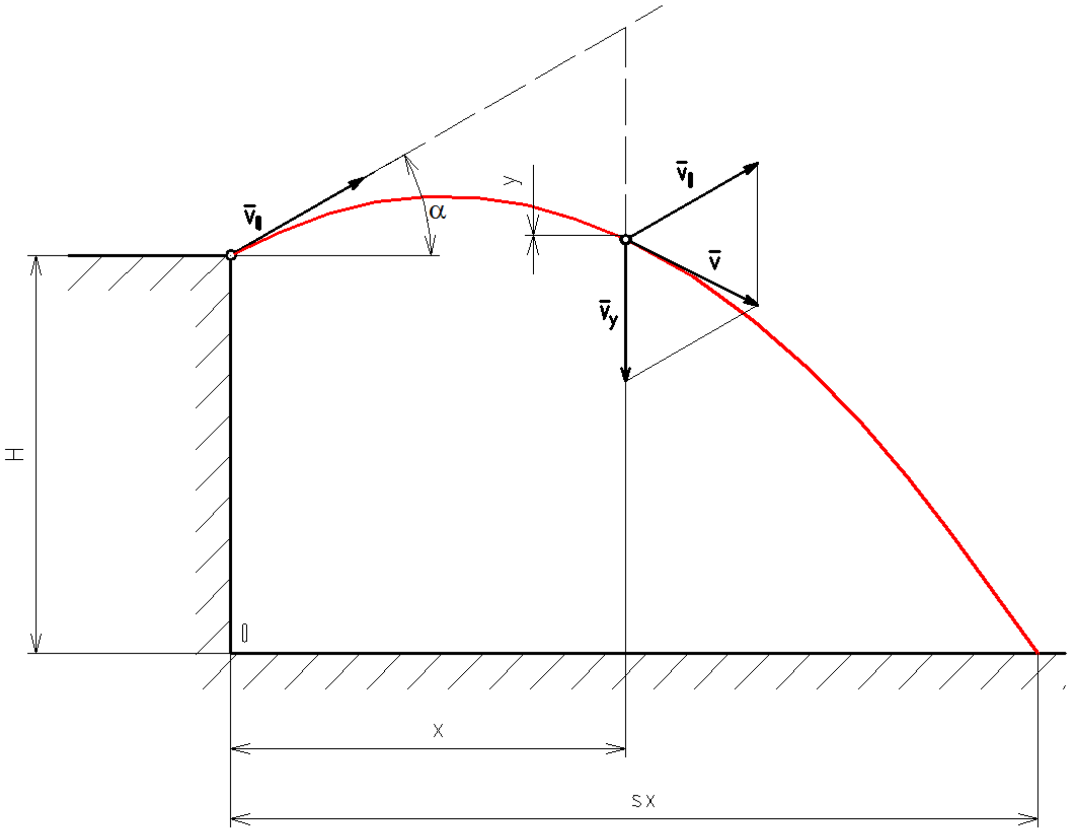
Okrajová podmínka $y = 0$ pro dobu pádu t_p vede ke kvadratické rovnici:

$$\frac{1}{2} g t_p^2 - v_0 t_p \sin\alpha - H = 0,$$

smysl má pouze kořen

$$\underline{t_p = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gH}}{g}}.$$

Pro $\alpha = 0$ obdržíme rovnici pro dobu pádu při vodorovném vrhu, pro $\alpha = 90°$ pro dobu pádu při svislém vrhu.



Obr. 61

Při vrhu z roviny dopadu ($H = 0$) dostaneme:

$$t_p = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Dostřel:

$$s_x = v_0 t_p \cos \alpha$$

s příslušnou dobou pádu t_p.

Vrh svislý vzhůru

Hmotný bod je vržen počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ svisle vzhůru. Pohybuje se tedy pohybem rovnoměrně zpožděným s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ a se zpožděním **g**[1]. Bez působení gravitace by se pohyboval svisle pohybem rovnoměrným přímočarým. Na vrh svislý můžeme nahlížet tak, že je složen z tohoto pohybu a z volného pádu.

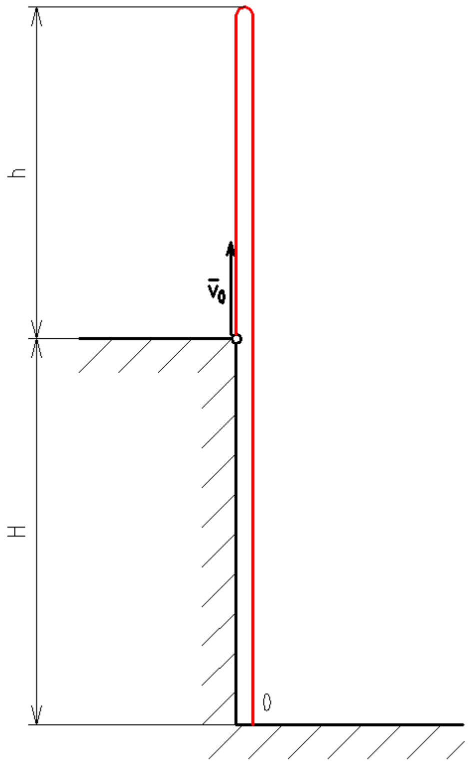
Souřadnice bodu v obecné poloze v čase t:

$$x = 0,$$

$$y = H + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

[1] Takto byl řešen v jedné z předchozích kapitol.

Okrajová podmínka $y = 0$ pro dobu pádu t_p vede ke kvadratické rovnici:



$$\frac{1}{2}gt_p^2 - v_0t_p - H = 0.$$

Smysl má pouze kořen[1]

$$\underline{t_p = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}}.$$

Při nulové počáteční výšce H je doba pádu:

$$\underline{t_p = \frac{2v_0}{g}}.$$

Dostup h určíme z podmínky, že rychlost $\mathbf{v} = 0$:

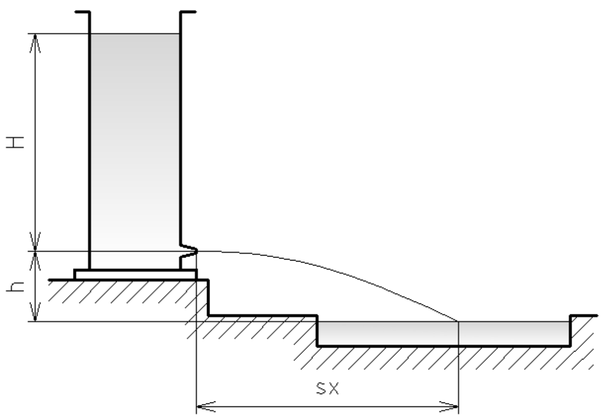
$$v = v_0 - gt = 0, \text{tedy } t = \frac{v_0}{g}.$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \underline{\frac{v_0^2}{2g}}.$$

Obr. 62

Příklad:

Voda z nádrže vytéká do jímky. Vypočítejte velikost skutečné výtokové rychlosti v_0 (je rovna rychlosti volného pádu tělesa z výšky H), dobu pádu t_p a dráhu, kterou paprsek vody urazí ve vodorovném směru. H = 3,2 m, h = 1,8 m, skutečná výtoková rychlost má velikost 80 % vypočtené rychlosti (ztráty). Dále určete rychlost, s jakou voda dopadá na hladinu v jímce.



Obr. 63

Řešení:

Velikost výtokové rychlosti:

$$v_0 = \sqrt{2gH} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 3{,}2\ \mathrm{m}} =$$

$$= \underline{7{,}92\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Skutečná výtoková rychlost: $v_s = 0{,}8v_0 =$

$$= 0{,}8 \cdot 7{,}92\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 6{,}34\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}}).$$

Pohyb odpovídá vodorovnému vrhu. Doba pádu:

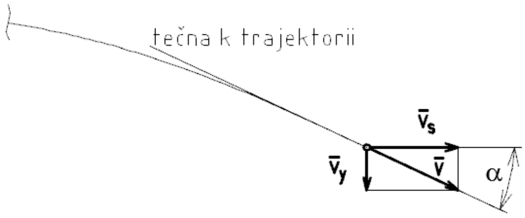
[1] Srovnej s výsledkem pro vrh šikmý po dosazení nulového úhlu náměru.

$$t_p = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}8\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}} = \underline{0{,}606\ (\mathrm{s})}.$$

Dostřel paprsku (dráha ve vodorovném směru):

$$s_x = v_s t_p = \underline{6{,}34\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} \cdot$$

Rychlost dopadu na hladinu jímky:



$$v = \sqrt{v_s^2 + \left(g t_p\right)^2} =$$

$$= \sqrt{6{,}34^2\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} + (9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 0{,}606\ \mathrm{s})^2} =$$

$$= \underline{8{,}7\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Obr. 64

Směrový úhel vektoru rychlosti:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_s} = \frac{9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 0{,}606\ \mathrm{s}}{6{,}34\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 0{,}94, \underline{\alpha = 43{,}2°}.$$

Příklad:
Vypočtěte teoretický dostřel 100 mm horské houfnice M 16/19, kterou vyráběla Škoda Plzeň po první světové válce. Náměr 5,5°, úsťová rychlost střely byla 341 m.s^{-1}. Při jakém úhlu náměru je dostřel šikmého vrhu největší[1] a jak je velký?

Obr. 65

Řešení:
Doba letu střely:

$$t_p = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 341\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot \sin 5{,}5°}{9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}} =$$

$$= \underline{6{,}66\ (\mathrm{s})}.$$

Dostřel:

$$s_x = v_0 t_p \cos\alpha = 341\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 6{,}66\ \mathrm{s} \cdot \cos 5{,}5° = \underline{2\,260{,}6\ (\mathrm{m})}.$$

Maximální teoretický dostřel je při úhlu 45°, což plyne z následujícího vztahu:

$$s_x = v_0 \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha\ ;\ s_{xmax} = \frac{341^2\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}}{9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}} \cdot \sin 2 \cdot 45° = \underline{11\,853\ (\mathrm{m})}.$$

[1] Skutečný maximální dostřel byl udáván přibližně 8,5 km.

Příklad:
Kámen byl při sopečném výbuchu vyvržen téměř svisle vzhůru do výšky 3 km. Určete teoretickou počáteční rychlost, dobu, za kterou dopadl na úpatí hory o 500 m níže, a dopadovou rychlost. Pohyb považujte za přibližný vrh svislý vzhůru a rozhodněte, zda skutečná rychlost je větší nebo menší než vypočtená.

Obr. 66

Řešení:
z rovnice

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

vypočteme teoretickou počáteční rychlost:

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 3\,000\ \mathrm{m}} = \underline{242{,}6\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Skutečná rychlost pro dosažení potřebné výšky musí být větší vzhledem k odporu vzduchu.

Doba letu:

$$t_p = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g} =$$
$$= \frac{242{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} + \sqrt{242{,}6^2\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} + 2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 500\ \mathrm{m}}}{9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}} = \underline{51{,}4\ (\mathrm{s})}.$$

Teoretická dopadová rychlost je rovna rychlosti volného pádu z výšky 3 500 m:

$$v_d = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 3\,500\ \mathrm{m}} = \underline{262{,}0\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Otázky:
1. Co je to princip superpozice pohybů?
2. Z jakých pohybů se skládají tzv. vrhy?
3. Jak by se tělesa při jednotlivých vrzích pohybovala bez působení gravitace?
4. Odvoďte z rovnice pro dobu pádu tělesa šikmo vrženého vztahy pro doby pádu vodorovného a svislého vrhu.

9. ROZKLAD OBECNÉHO ROVINNÉHO POHYBU TĚLESA

Obsah této kapitoly:

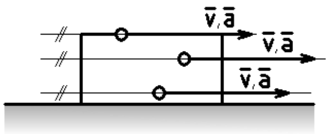
→ *Shrnutí pohybů tělesa obecný a základní rozklad*
→ *Unášivý pohyb posuvný, relativní rotační*
→ *Unášivý pohyb rotační, relativní posuvný, Coriolisovo zrychlení*
→ *Oba dílčí pohyby rotační*

Shrnutí pohybů tělesa, obecný a základní rozklad

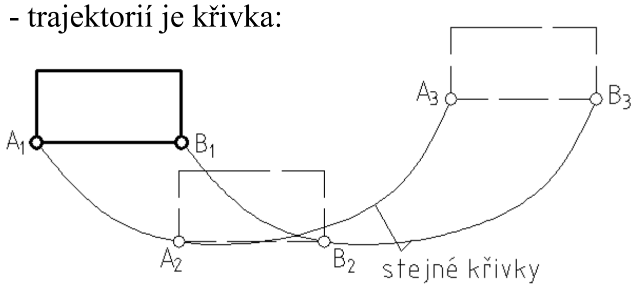
Rovinným pohybem je pohyb, kdy se všechny body tělesa pohybují ve stejných, vzájemně rovnoběžných rovinách. Pohyb stačí řešit v jedné z těchto rovin.

A) Pohyb translační (posuvný):

- trajektorií je přímka:



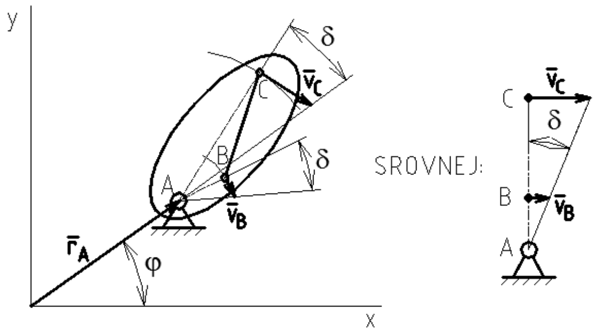
- trajektorií je křivka:



Obr. 67
Obr. 68

Kinematika translačního pohybu tělesa je určena jedním bodem.

B) Pohyb rotační (otáčivý):



$\mathbf{r}_A$ = konst. (tzn. r_A = konst., φ = konst.),

$\overline{BC}$ … tuhá úsečka.

$\omega_C = \omega_B \sim \tan\delta$,

$\omega_B = \dfrac{v_B}{r_B}$, $\quad \omega_C = \dfrac{v_C}{r_C}$.

Obr. 69

Ze středu otáčení vidíme vektory obvodových rychlostí pod stejným zorným úhlem δ.

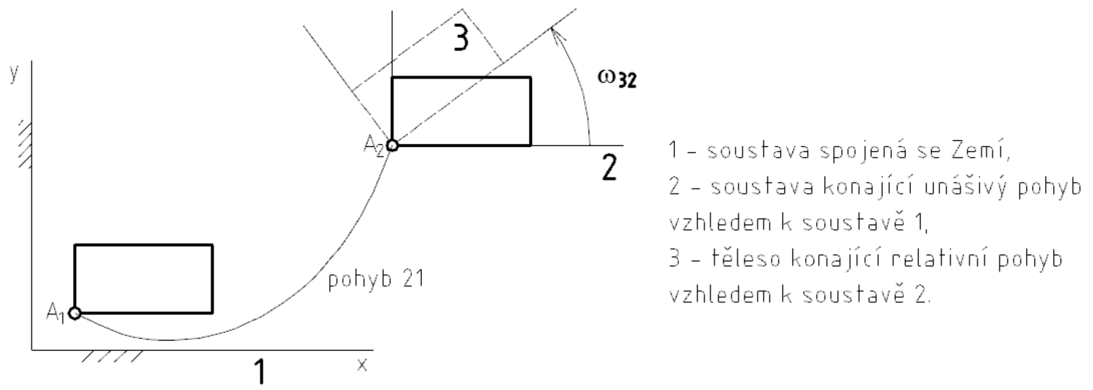
Zrychlení: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$ (vektorová rovnice!), $a_t = \varepsilon r$, $a_n = r\omega^2$.

C) Obecný rovinný pohyb:

Výsledný pohyb je dán složením unášivého pohybu referenčního bodu a relativního otáčivého pohybu vzhledem k referenčnímu bodu.

Je-li unášivý pohyb posuvný, provádíme tzv. základní rozklad na tyto dílčí pohyby, je-li unášivý pohyb neposuvný, provádíme obecný rozklad.

Rozklad rovinného pohybu na unášivý pohyb a relativní (druhotný) pohyb. Referenční bod *A*:



Obr. 70

Pro rychlosti a zrychlení píšeme obecný zápis:

31 = 32 + 21.

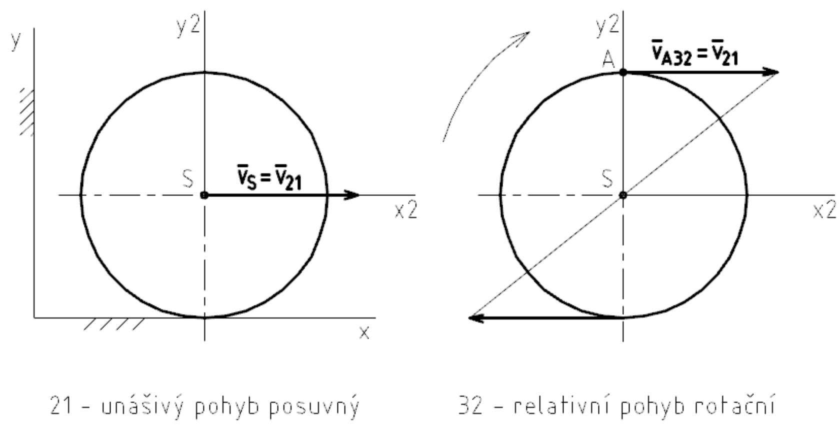
Čteme např.: okamžitá výsledná (absolutní) rychlost členu 3 vzhledem k členu 1 je dána vektorovým součtem okamžité rychlosti unášivého pohybu tělesa 2 vzhledem k tělesu 1 a druhotného (relativního) pohybu tělesa 3 vzhledem k tělesu 2. Totéž pro zrychlení.

V dalším textu analyzujeme některé typické případy.

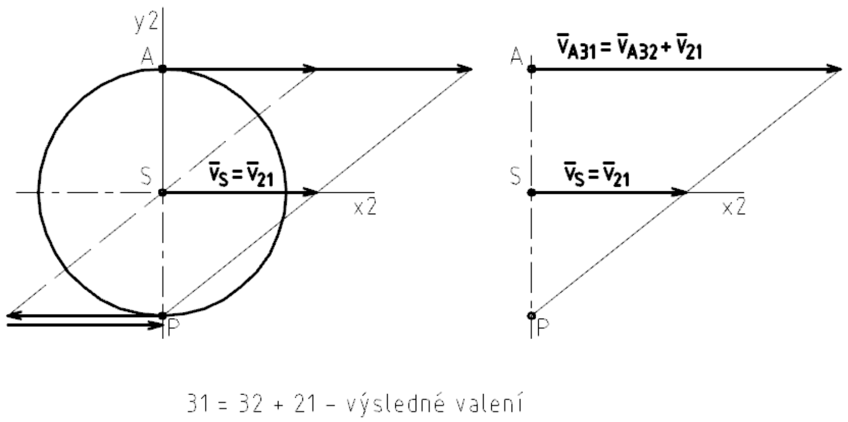
Unášivý pohyb posuvný, relativní rotační

Typickým příkladem tohoto složeného pohybu je pohyb bodů ležících na válci nebo kotouči, který se valí po rovině. Můžeme si jej představit např. jako pohyb ventilku pneumatiky při jízdě vozidla.

Trajektorií takového bodu je cykloida.



Obr. 71



Obr. 72

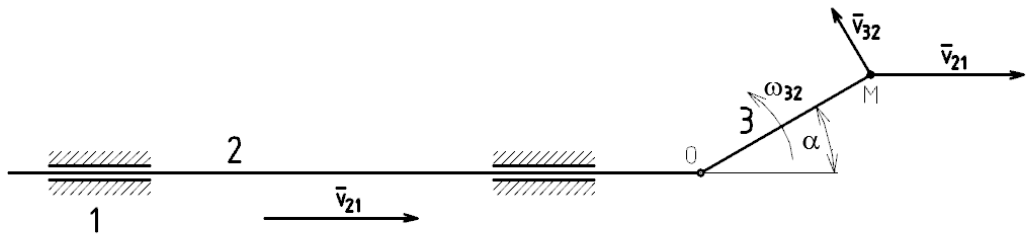
Při analýze valivého pohybu si všimneme bodu P. Složením rychlosti unášivého pohybu a relativního pohybu, které jsou při valení číselně stejné, ale mají opačný smysl, zjistíme, že rychlost tohoto bodu je nulová. Obrazec rychlostí vychází stejně, jako kdyby se těleso v daném okamžiku otáčelo kolem tohoto bodu.

Jestliže je u složeného pohybu nenulová úhlová rychlost, lze najít bod, jehož okamžitá rychlost je rovna nule. Tento bod, okamžitý střed otáčení (pól), umožňuje řešit obecný pohyb jako okamžitou rotaci kolem tohoto bodu.

Základní vlastnosti pólu:
1. **Normály trajektorií všech bodů tělesa procházejí pólem (tato vlastnost umožňuje nalezení).**
2. **Z pólu – okamžitého středu otáčení vidíme vektory rychlostí pod stejným zorným úhlem (tato vlastnost umožňuje řešit rychlost libovolného bodu tělesa).**

Spojnice okamžitých poloh pólu nahlížená ze soustavy 1 se nazývá **pevná polodie**, spojnice okamžitých poloh pólu nahlížená z tělesa 3 se nazývá **hybná polodie**. Obecný pohyb lze nahradit valením hybné polodie po pevné polodii. Při valení kružnice po přímce je pevnou polodií ona přímka, hybnou polodií daná kružnice.

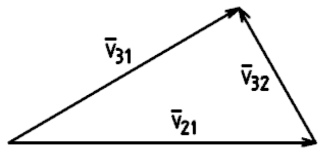
Příklad:
Řešte okamžitou rychlost a okamžité zrychlení bodu *M* mechanismu. Tyč 2 se pohybuje ve vedení 1, rameno OM se otáčí kolem bodu *O*.



Řešení:
Provedeme základní rozklad na unášivý pohyb posuvný daný pohybem tyče 2 a relativní pohyb rotační ramene 3 kolem bodu *O*:

31 = 21 +32.

Pak pro rychlosti a zrychlení platí (vektorově): $\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{32}$, $\mathbf{a}_{31} = \mathbf{a}_{21} + \mathbf{a}_{32}$.

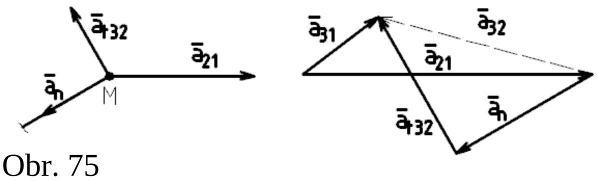


Velikost relativní obvodové rychlosti $v_{32} = \omega_{32} \cdot \overline{OM}$.

Obr. 74

Zrychlení relativního pohybu bodu *M* má tečnou a normálovou složku, tedy

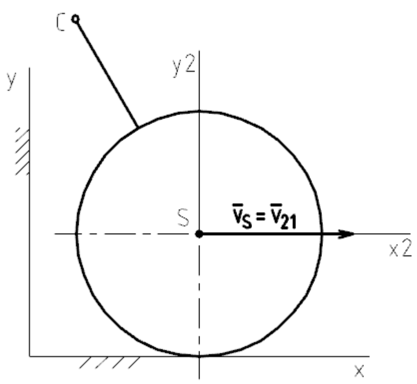
$\mathbf{a}_{32} = \mathbf{a}_{t32} + \mathbf{a}_{n32}$, $\mathbf{a}_{31} = \mathbf{a}_{21} + \mathbf{a}_{t32} + \mathbf{a}_{n32}$.

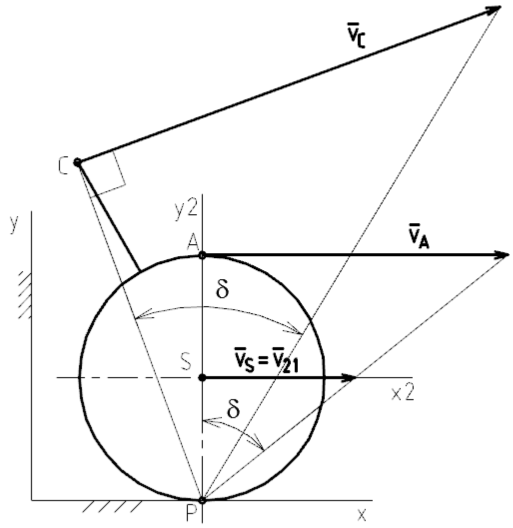


Obr. 75

Příklad:
Nalezněte okamžitou rychlost bodu *C* při valení kružnice po přímce.

Řešení:



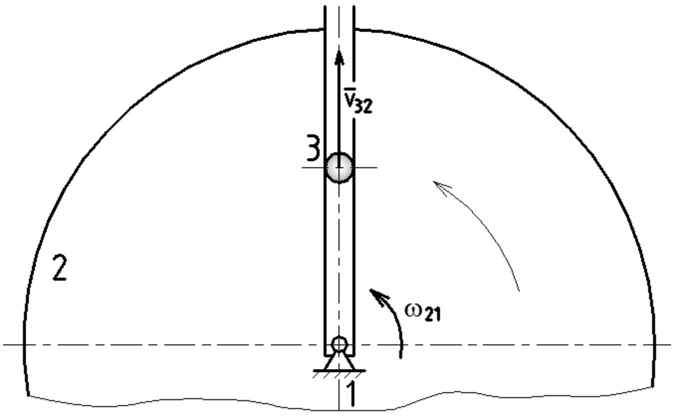


Obr. 76
Obr. 77

Nejprve nalezneme okamžitý střed otáčení – pól. Normála trajektorie bodu *C* prochází pólem (spojnice *CP*) a vektor okamžité rychlosti bodu *C* je k ní kolmý (obvodová rychlost okamžité rotace kolem pólu. Velikost rychlosti v_C určíme přenesením „zorného“ úhlu. Přímka je pevnou polodií k_N.

Unášivý pohyb rotační, relativní posuvný, Coriolisovo zrychlení

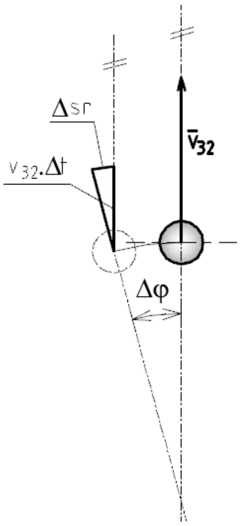
Tento pohyb nalezneme např. u odstředivého čerpadla, turbodmychadla nebo u kočky otočného jeřábu. Pohyb můžeme znázornit následujícím modelem:



Hmotný bod 3 je unášen rotujícím kanálem, vzhledem k němu se pohybuje rovnoměrnou relativní rychlostí $\mathbf{v}_{32}$ směrem k obvodu nebo ke středu.

Při tomto pohybu dochází nejen ke změně unášivé rychlosti (růst poloměru), ale i k odklonu relativní rychlosti. To postihuje tzv. Coriolisovo zrychlení[1] $\mathbf{a}_C$.

Obr. 78



Pohyb hmotného bodu rozložíme na posun ve směru relativního pohybu po dráze $v_{32} \cdot \Delta t$ a posun po dráze Δs_r způsobený odklonem vektoru relativní rychlosti:

$$\Delta s_r = v_{32}\Delta t \Delta\varphi = \frac{1}{2} a_C \Delta t^2.$$

Po úpravě a zkrácení rovnice Δt:

$$a_C = 2v_{32} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \underline{2v_{32}\omega_{21}}.$$

Coriolisovo zrychlení se vyskytuje tehdy, když má unášivý pohyb nenulovou úhlovou rychlost. Jeho smysl obdržíme tak, že otočíme vektor relativní rychlosti o 90° ve smyslu unášivé rotace.

Obr. 79

Coriolisovo zrychlení je důsledkem Coriolisovy síly[2], jejíž vznik lze vysvětlit zákonem zachování momentu hybnosti. Coriolisova síla se v makroskopickém měřítku projevuje na mořských proudech, proudění vzduchu, na nerovnoměrném vymílání břehů veletoků a nerovnoměrném opotřebení kolejnic železničních magistrál.

Příklad:
Určete Coriolisovo zrychlení pístu, jemuž je vystaven píst v rotujícím válci leteckého rotačního motoru[3]. Okamžitá rychlost pístu při pohybu z dolní úvratě je 6 m.s^{-1}, otáčky motoru jsou n = 1 200 min^{-1}.

Řešení:
Relativní rychlostí $\mathbf{v}_{32}$ je rychlost pístu ve válci 6 m.s^{-1}, úhlová rychlost unášivého pohybu rotace motoru je:

[1] Gaspard Coriolis (1792-1843), francouzský matematik a fyzik.
[2] Coriolisova síla byla objevena v souvislosti se stáčením trajektorie dalekonosných dělostřeleckých granátů vlivem rotace Země. Unášivým pohybem je zemská rotace, relativním pohybem je přibližování tělesa k zemské ose.
[3] Letecké rotační motory se používaly u letadel v první světové válce. Kolem nehybného klikového hřídele se otáčel blok válců s ojnicemi a písty.

$\omega_{21} = 2\pi n = 2\pi \cdot 20\ \mathrm{s}^{-1} = 125{,}7\ (\mathrm{s}^{-1})$.

Coriolisovo zrychlení:

$a_C = 2v_{32}\omega_{21} = 2 \cdot 6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 125{,}7\ \mathrm{s}^{-1} = \underline{1\,508{,}4\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})}$.

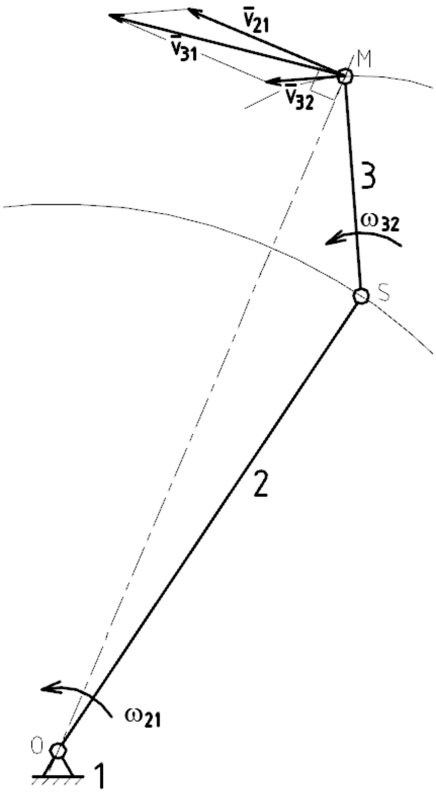
Smysl $\mathbf{a}_C$ obdržíme otočením vektoru relativní rychlosti o 90° ve smyslu ω_{21}.

Po vynásobení hmotností pístu (2. pohybový zákon) bychom obdrželi Coriolisovu sílu, kterou na sebe vzájemně působí píst a válec.

Obr. 80

Oba dílčí pohyby otáčivé

Typickým příkladem je např. pohyb planetového soukolí nebo valivých tělísek v ložisku. Obecnější případ představuje následující mechanismus:



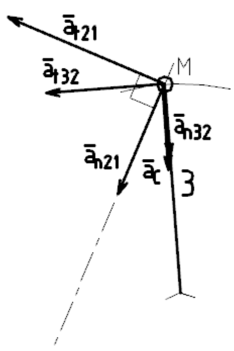
Unášivý pohyb 21 koná rameno 2, vzhledem k němu se relativním pohybem 32 otáčí rameno 3:

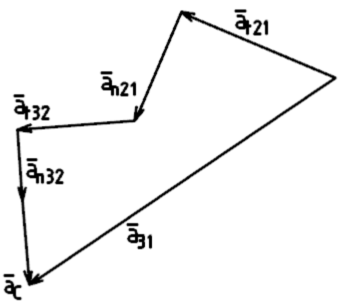
$$31 = 21 + 32.$$

Výsledná rychlost bodu M je dána vektorovou rovnicí

$$\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{32}.$$

Zrychlení v bodě M jsou tečné a normálové zrychlení unášivého pohybu, tečné a normálové zrychlení relativního pohybu a Coriolisovo zrychlení – unášivý pohyb má nenulovou úhlovou rychlost. Směr a smysl Coriolisova zrychlení obdržíme otočením vektoru relativní rychlosti $\mathbf{v}_{32}$ o 90° ve smyslu unášivé rotace 21.



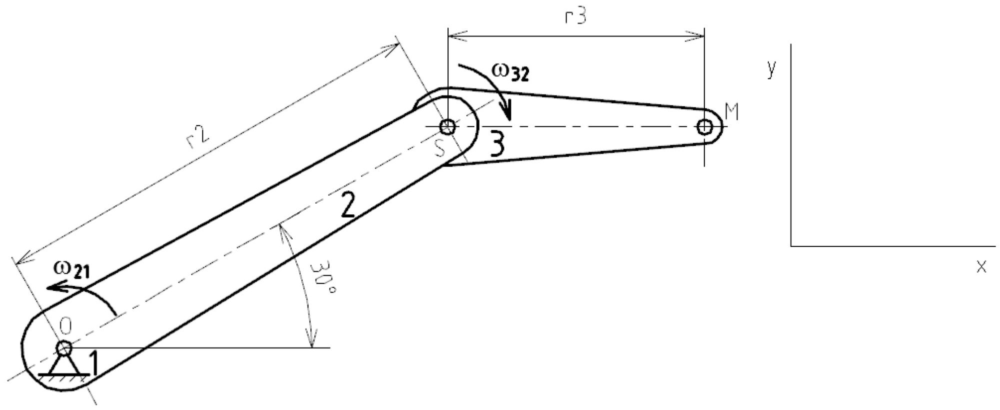


Obr. 81
Obr. 82

Výsledné zrychlení bodu M je dáno vektorovou rovnicí

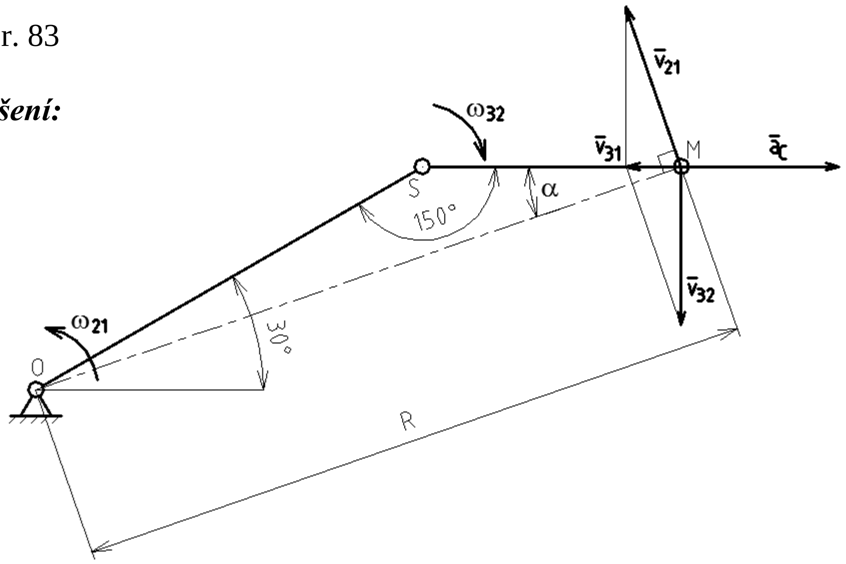
$$\mathbf{a}_{31} = \mathbf{a}_{t21} + \mathbf{a}_{n21} + \mathbf{a}_{t32} + \mathbf{a}_{n32} + \mathbf{a}_C.$$

Příklad:
Kinematický řetězec manipulátoru se skládá ze dvou ramen o poloměrech r_2 = 1 m a r_3 = 0,6 m. Rameno 2 se otáčí kolem svislé osy otáčkami n_{21} = 0,3 s^{-1}. Určete, jakými relativními otáčkami se musí v daném okamžiku otáčet rameno 3, aby se bod *M* pohyboval ve směru osy *x*. Určete dále velikosti relativní rychlosti, výsledné rychlosti a Coriolisovo zrychlení bodu *M*.



Obr. 83

Řešení:



Obr. 84

Okamžitý poloměr R vypočítáme z kosinové věty:

$$R = \sqrt{r_2^2 + r_2^3 - r_2 r_3 \cos 150°} = \sqrt{1^2\ \mathrm{m}^2 + 0{,}6^2\ \mathrm{m}^2 - 1\ \mathrm{m} \cdot 0{,}6\ \mathrm{m} \cdot \cos 150°} = 1{,}37\ (\mathrm{m}).$$

Velikost unášivé rychlosti bodu *M*:

$$v_{21} = \omega_{21} \cdot R = 2\pi n_{21} \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}3\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 1{,}37\ \mathrm{m} = \underline{2{,}58\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Úhel α ze sinové věty:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 150°} = \frac{r_2}{R};\ \ \sin\alpha = \frac{r_2}{R}\sin 150° = \frac{1\ \mathrm{m}}{1{,}37\ \mathrm{m}}\sin 150° = 0{,}365;\ \alpha = 21{,}4°.$$

V rychlostním trojúhelníku je úhel $\beta = 90° - \alpha = 90° - 21{,}4° = 68{,}6°$.

Velikost relativní rychlosti bodu *M*:

$$v_{32} = v_{21} \sin 68{,}6° = 2{,}58\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot \sin 68{,}6° = \underline{2{,}40\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Odtud okamžité otáčky ramene 3:

$$n_{32} = \frac{v_{32}}{2\pi r_3} = \frac{2{,}40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{2\pi \cdot 0{,}6\ \mathrm{m}} = \underline{0{,}637\ (\mathrm{s^{-1}})}.$$

Velikost výsledné rychlosti bodu *M*:

$$v_{31} = v_{21} \cos 68{,}6° = 2{,}58\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot \cos 68{,}6° = \underline{0{,}94\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}.$$

Velikost Coriolisova zrychlení:

$$a_C = 2 v_{32} \omega_{21} = 2 \cdot 2{,}40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 2\pi \cdot 0{,}3\ \mathrm{s^{-1}} = \underline{9{,}05\ (0{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})}.$$

Jeho smysl obdržíme otočením vektoru relativní rychlosti ve smyslu unášivé rotace.

Otázky:

1. Jaký je rozdíl mezi základním a obecným rozkladem rovinného pohybu?
2. Co je pól a jaký má význam?
3. Kdy se vyskytuje Coriolisovo zrychlení a jak se určí jeho velikost, směr a smysl?

10. ZÁKLADNÍ POJMY KINEMATIKY MECHANISMŮ

Obsah této kapitoly:

→ *Pojem mechanismu*

→ *Kinematické dvojice*

→ *Počet stupňů volnosti soustavy*

Pojem mechanismu

Mechanismus je pohyblivá mechanická soustava v rámci stroje, jejíž hlavní funkcí je přenos nebo transformace (změna druhu, smyslu, velikosti apod.) pohybu, případně přenos zatížení od vstupního členu k výstupnímu.

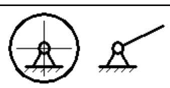
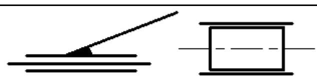
Obr. 85

Základní rozdělení mechanismů lze provést na mechanismy převodové (transformace pohybu i zatížení) a mechanismy vodicí (pro pohyb po určité trajektorii). Dalšími hledisky může být trajektorie vstupního a výstupního členu (pohyb přímočarý, rotační, rovinný, prostorový), počet členů včetně základního rámu (tříčlenné, čtyřčlenné mechanismy) aj. Součásti mechanismu nazýváme **členy** a ty jsou spojeny **kinematickými vazbami** v **kinematické dvojice**.

Kinematické dvojice

Základní kinematické dvojice rovinného mechanismu jsou tvořeny čtyřmi kinematickými vazbami:

r – rotační kinematická vazba,
p – posuvná kinematická vazba,
v – valivá kinematická vazba (bez prokluzu),
o – obecná kinematická vazba (s prokluzem).

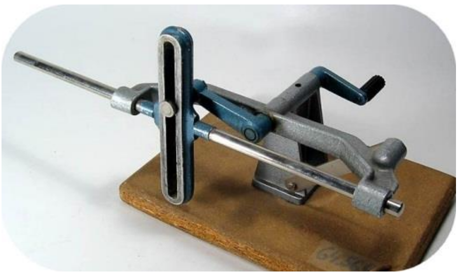
Kinematická vazba	**Schematické značení**	**Příklad použití**
Rotační		Kolo na hřídeli, páka
Posuvná		Píst ve válci
Valivá		Valení pojezdového kola
Obecná		Záběr ozubených kol, vačky

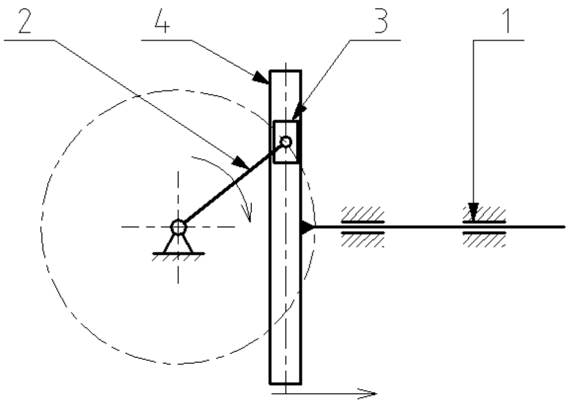
Rotační, posuvná a valivá vazba dávají tělesu pouze jednu pohybovou možnost (jeden stupeň volnosti), obecná vazba dává možnosti dvě – rotaci a posuv.

Počet stupňů volnosti soustavy

Počet stupňů volnosti i udává pohybové možnosti soustavy. Je-li počet stupňů volnosti roven 0, je soustava nepohyblivá. Počet stupňů volnosti (zkráceně stupeň volnosti) vypočítáme z rovnice vazbové závislosti: $i = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot (r + p + v) - o$.
n – počet členů včetně základního rámu, *r, p, v, o* – počet základních kinematických vazeb.

Příklad:
Určete stupeň volnosti kulisového mechanismu[1].



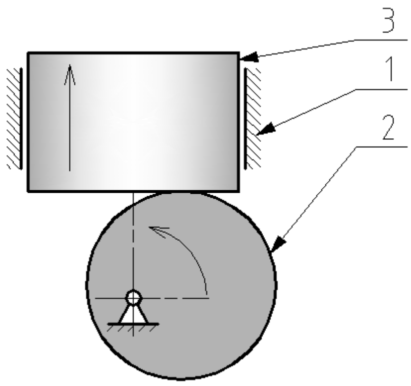


1 – základní rám (nepohyblivá součást)
2 – klika (rotační pohyb)
3 – kámen
4 – kulisa (přímočarý vratný pohyb)

Obr. 86
Obr. 87

Řešení:
Celkový počet členů *n* = 4, počty vazeb *r* = 2 (mezi 1-2 a mezi 2-3), *p* = 2 (mezi 3-4 a 4-1), *v* = 0, *o* = 0.
Rovnice vazbové závislosti: $i = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot (2 + 2 + 0) - 0 = 9 - 8 = \underline{1}$.

Příklad:
Určete počet stupňů volnosti vačkového mechanismu[2].



Řešení:
Celkový počet členů *n* = 3, počty vazeb *r* = 1 (mezi 1-2), *p* = 1 (mezi 3-1), *v* = 0, *o* = 1.
$i = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot (1 + 1 + 0) - 1 = 6 - 4 - 1 = \underline{1}$.

Obr. 88

Úkol:
Nalezněte u zařízení ve svém okolí příklady kinematických dvojic.

[1] Kulisový mechanismus, v tomto případě s přímočaře se pohybující kulisou, transformuje rotační pohyb kliky na přímočarý vratný pohyb kulisy.
[2] Vačkový mechanismus patří mezi trojčlenné mechanismy, tzn. musí obsahovat obecnou kinematickou vazbu.

11. KINEMATIKA PŘEVODŮ TOČIVÉHO POHYBU

Obsah této kapitoly:

→ *Princip, rozdělení*

→ *Převodový poměr jednoduchého převodu*

→ *Převodový poměr složeného převodu*

→ *Planetová soukolí*

Princip, rozdělení, základní veličiny

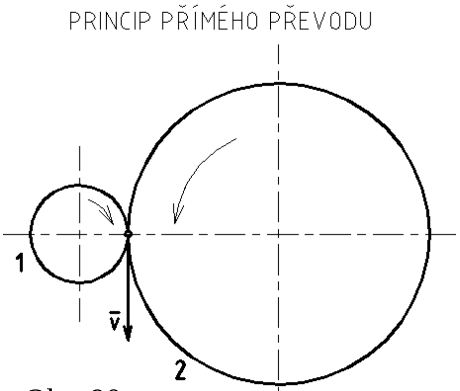
Převody jsou mechanismy, jejichž hlavní funkcí je přenos otáčivého pohybu z hnacího hřídele na hnaný při změně otáček a točivého momentu. Setkáme se s nimi ve většině strojních zařízení – v dopravních prostředcích, ve výrobních strojích, v přístrojích i ve strojcích v domácnosti.

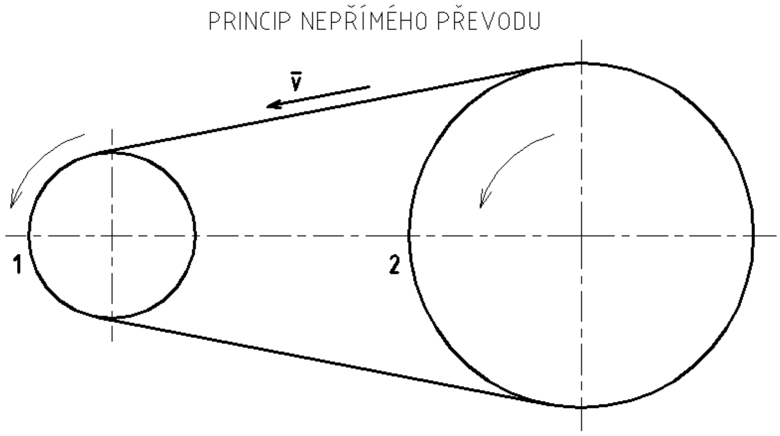
Kromě toho může u některých převodů docházet ke změně smyslu otáčení, případně ke změně převodového poměru, u některých převodů i plynulé (variátory, CVT – Continuously Variable Transmissions). Hnací i hnaný hřídel mohou mít vzájemně rovnoběžné, různoběžné, nebo mimoběžné osy. Některé druhy převodů jsou vhodné pro přenos pohybu pouze mezi blízkými hřídeli, jiné pro přenos mezi hřídeli vzdálenějšími.

Obr. 89

Rozdělení:

Základní rozdělení je na převody **přímé** a **nepřímé** (s mezičlenem). Převody přímé jsou převody třecími koly (zkráceně třecí převody) a převody ozubenými koly, nepřímé převody jsou řemenové, lanové, řetězové a převody ozubenými řemeny (sekundární převod motocyklu na obrázku).





Obr. 90

Obr. 91

Dalším hlediskem může být rozdělení na převody předlohové (osy kol nemění svou polohu vůči základnímu rámu) a planetové (některá kola – satelity se otáčejí kolem osy, která obíhá kolem jiné osy). Většinou se jedná o převody ozubenými koly.

Převodový poměr jednoduchého převodu:

Jednoduchý převod se skládá ze dvou kol. Obvodové rychlosti obou kol jsou teoreticky stejné, ve skutečnosti se mírně odlišují u převodů na principu tření (třecí, řemenové a lanové).

Převodový poměr je základním parametrem převodu. Označujeme jej *i* s příslušnými indexy, které odpovídají označení kol. Základním vyjádřením převodového poměru je poměr úhlové rychlosti (a tedy otáček) hnacího kola k úhlové rychlosti (otáčkám) hnaného kola:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Poměr odvodíme z rovnosti obvodových rychlostí, z níž plyne:

$$\pi \cdot D_1 \cdot n_1 = \pi \cdot D_2 \cdot n_2,$$

$$i_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Poměr otáček hnacího kola k otáčkám hnaného kola se rovná poměru průměru hnaného kola k průměru hnacího kola. Jednoduše řečeno větší kolo má menší otáčky.

U převodů ozubenými koly se rozměry počítají pomocí modulu *m*, což je základní míra (normalizovaná z důvodu omezení sortimentu nástrojů a zhospodárnění výroby). Modul je stejný pro obě kola, průměr roztečné kružnice kola je přímo úměrný počtu zubů:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{m \cdot z_2}{m \cdot z_2},$$

$$i_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Je-li převodový poměr $i_{1,2} > 1$, jedná se o převod **do pomala** (reduktor), je-li převodový poměr $i_{1,2} < 1$, jedná se o převod **do rychla** (multiplikátor).

U převodů na principu tření se mírně liší skutečné otáčky hnaného kola od teoretické hodnoty odpovídající výše uvedeným rovnicím. Příčinou je skluz způsobený u řemenových převodů proměnlivou silou, které je řemen vystaven při styku s řemenicí (na počátku je větší a řemen se více protáhne), u třecích převodů souvisí skluz s deformacemi povrchů kol při kontaktu. Skluz vyjadřujeme součinitelem skluzu $\psi < 1$.

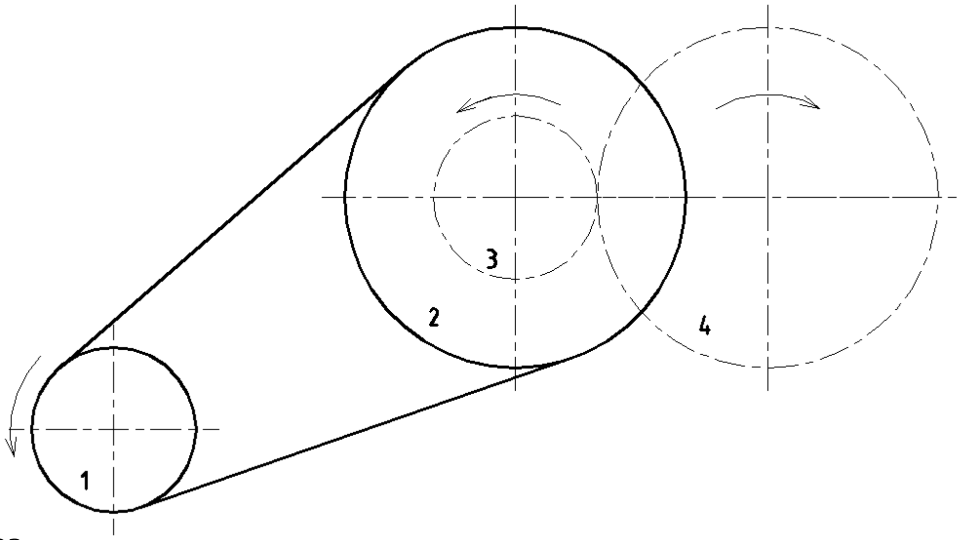
$$n_{2skut} = \psi \cdot n_{2teor},$$

$$i_{1,2} = \frac{n_1}{n_{2teor}} = \frac{n_1}{\frac{n_{2skut}}{\psi}} = \frac{D_2}{D_1},$$

$$i_{1,2} = \frac{n_1}{n_{2skut}} = \frac{D_2}{D_2 \psi}.$$

Převodový poměr složeného převodu

Složený převod se použije při potřebě velkého převodového poměru, aby průměry kol nebyly neúměrně rozdílné. Mezi hnací a hnaný hřídel jsou vloženy hřídele předlohové. Příkladem může být častá kombinace řemenového převodu a převodu ozubenými koly.



Obr. 92

Hřídel s koly 2, 3 se nazývá **předlohový**, platí pro něj $n_2 = n_3$.

Převod mezi koly 1, 2:

$$i_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}, \quad n_2 = n_1 \cdot \frac{D_1}{D_2}.$$

Převod mezi koly 3, 4:

$$i_{3,4} = \frac{n_3}{n_4} = \frac{n_2}{n_4} = \frac{z_4}{z_3}, \qquad \frac{n_1}{n_4} \cdot \frac{D_1}{D_2} = \frac{z_4}{z_3}.$$

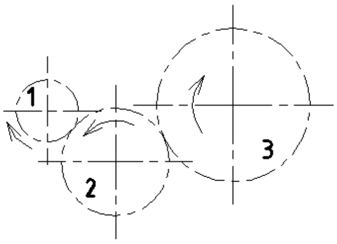
Celkový převod:

$$i_{1,4} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

Převodový poměr složeného převodu obdržíme vynásobením dílčích převodových poměrů.

Převod s vloženým kolem

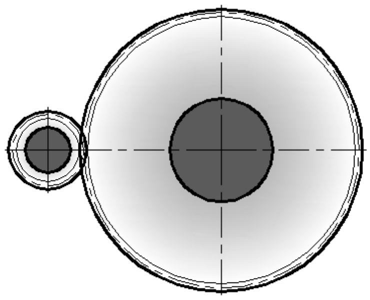
Převod s vloženým kolem je zvláštním případem složeného převodu. Vložené kolo nemění převodový poměr, pouze obrací smysl otáčení hnaného kola.



$$i_{1,3} = \frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Obr. 93

Příklad:
Hnací hřídel se otáčí otáčkami n_1 = 450 min^{-1}. Modul ozubení je m = 3 mm, počet zubů hnacího kola je 21. Převodový poměr soukolí je $i_{1,2}$ = 3,857. Vypočtěte průměry kol a otáčky hnaného hřídele.



Řešení:
Počet zubů hnaného kola určíme z převodového poměru:

$$i_{1,2} = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow z_2 = i_{1,2} \cdot z_1 = 3{,}857 \cdot 21 = \underline{81}.$$

Průměry kol:

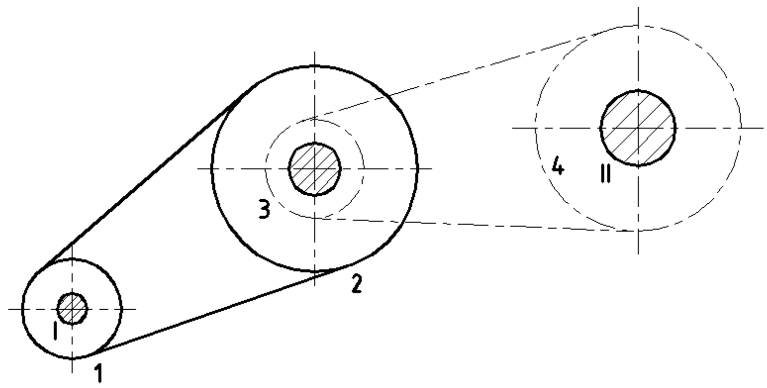
$$D_1 = m \cdot z_1 = 3\ \text{mm} \cdot 21 = \underline{63\ (\text{mm})},$$
$$D_2 = m \cdot z_2 = 3\ \text{mm} \cdot 81 = \underline{243\ (\text{mm})}.$$

Obr. 94

Otáčky hnaného hřídele:

$$i_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{n_1}{i_{1,2}} = \frac{450\ \text{min}^{-1}}{3{,}857} = \underline{116{,}67\ (\text{min}^{-1})}.$$

Příklad:
Pohon je realizován převodem složeným z převodu řemenového a řetězového. Hnací hřídel I se otáčí otáčkami n_{I} = 1500 min^{-1}. Průměr hnací řemenice je 110 mm. Počet zubů malého řetězového kola (pastorku) z_3 = 25. Hnaný hřídel se má otáčet otáčkami n_{II} = 125 min^{-1}. Navrhněte dílčí převodové poměry za podmínek, že jednoduchý převodový poměr nemá být větší než 4 a $i_{3,4} > i_{1,2}$, průměr hnané řemenice a počet zubů hnaného řetězového kola.



Řešení:
Celkový převodový poměr:

$$i_{1,4} = \frac{n_{\text{I}}}{n_{\text{II}}} = \frac{1500}{125} = 12,$$

$$i_{1,4} = i_{1,2} \cdot i_{3,4},$$

Volíme např. $i_{1,2} = 3, i_{3,4} = 4.$

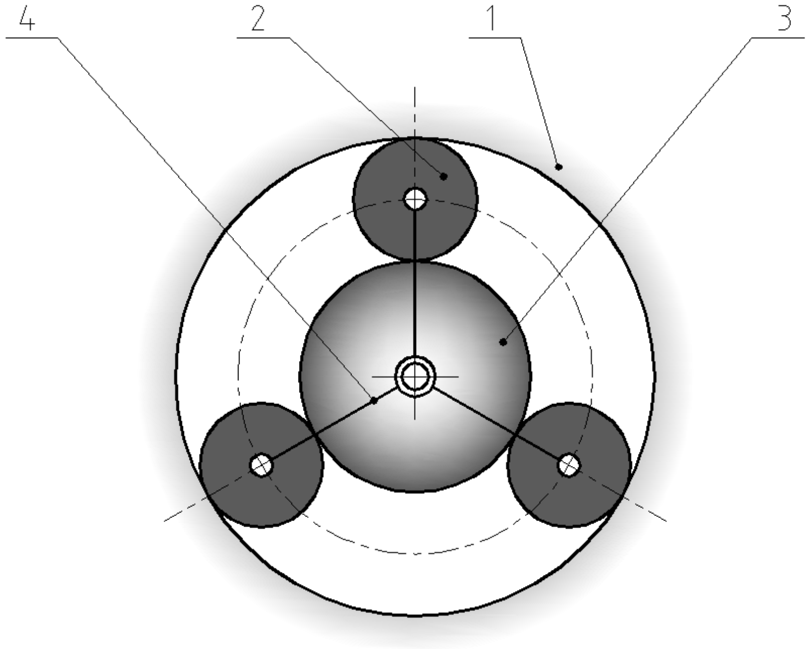
Obr. 95

$$D_2 = D_1 \cdot i_{1,2} = 110\ \text{mm} \cdot 3 = \underline{330\ (\text{mm})},$$
$$z_4 = z_3 \cdot i_{3,4} = 25 \cdot 4 = \underline{100}.$$

Otázky a úkol:
1. Odvoďte vztah pro převodový poměr, vysvětlete pojmy převod do pomala a do rychla.
2. Jak se počítá převodový poměr složeného převodu?
3. Proč je řemenový převod nepřesný?

Planetová soukolí

V planetových převodech nemají všechna kola pevně umístěné osy, některá kola obíhají kolem jiných kol. Tato obíhající kola nazýváme satelity. Satelity jsou spojeny členem nazývaným unášeč. Převod je uskutečněn mezi tímto unášečem a jedním z centrálních kol[1]. Jejich hřídele jsou souosé. Druhé centrální kolo je nehybné (pokud se nejedná o tzv. diferenciál).

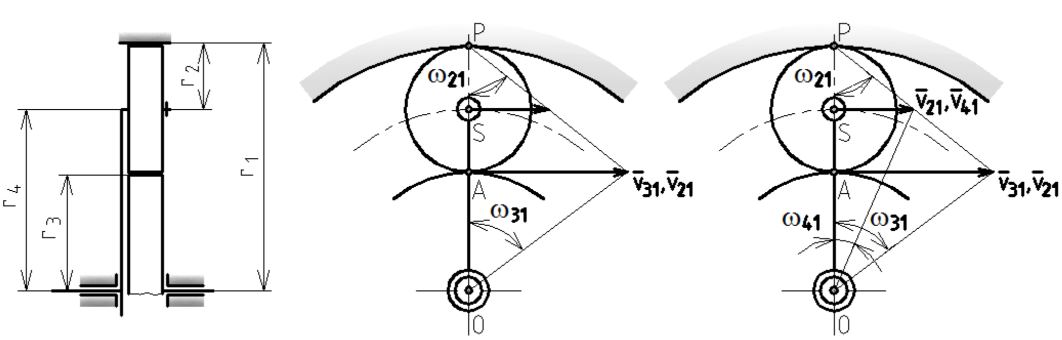


1 – Vnější centrální kolo (korunové)
2 – Satelit (počet 2 – 3)
3 – Vnitřní centrální kolo
4 – Unášeč satelitů

Obr. 96
Obr. 97

Výhodami planetových převodů jsou souosost hnacího a hnaného hřídele, malá setrvačnost, velká účinnost, možnost dosáhnout velkého převodu malým počtem kol apod. Používají se v široké škále strojů a zařízení od přístrojů po těžké pohony a reduktory letadlových motorů.

Pohyb satelitu, převodový poměr planetového převodu:



Obr. 98

[1] Planetové převody jsou sestaveny většinou z čelních nebo kuželových kol, ale existují i planetová soukolí se šnekovými převody (automobilové diferenciály s řízenou samosvorností).

Předpokládejme případ, že nehybným kolem je korunové kolo. Pak bod A je valivým bodem satelitu a vnitřního kola a rychlost kol 2 a 3 je v tomto bodě stejná. Satelit se odvaluje po nehybném kole 1 a okamžitá rychlost bodu A je tak dvojnásobkem oběžné rychlosti středu satelitu (bod S). Bod P má zvláštní význam – odvalující se satelit se chová, jako kdyby se v daném okamžiku pouze otáčel kolem bodu P (vzpomeňme na průběh rychlostí bodů otáčejícího se tělesa). Bod P se skutečně nazývá okamžitý střed otáčení (také pól).

Podobný rozbor provedeme i u bodu S. Jako bod tělesa 2 (satelit) má stejnou rychlost jako bod tělesa 4 (unášeč).

Značení rychlostí: v_{AB} znamená, že udáváme relativní rychlost tělesa A vzhledem k tělesu B.

Z výše uvedené úvahy plynou rovnice pro výpočet:

v bodě S: $v_{21} = v_{41}, tedy \ r_2 \cdot \omega_{21} = r_4 \cdot \omega_{41},$
v bodě A: $v_{31} = v_{21}, tedy \ r_3 \cdot \omega_{31} = 2r_2 \cdot \omega_{21}.$

Z rovnic vyloučíme poloměr unášeče, abychom mohli místo poloměrů počítat s počty zubů, a úhlovou rychlost satelitu, abychom obdrželi vztah mezi úhlovými rychlostmi (a tedy otáčkami).

$$\omega_{21} = \omega_{31} \cdot \frac{r_3}{2r_2}, \quad r_4 = r_3 + r_2.$$

Po dosazení do první rovnice:

$$r_2 \cdot \omega_{31} \cdot \frac{r_3}{2r_2} = (r_3 + r_2) \cdot \omega_{41}.$$

Převodový poměr např. $i_{4,1}$[1]:

$$i_{3,4} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{41}} = \frac{n_3}{n_4} = \frac{2(r_3 + r_2)}{r_3} = \frac{2(z_3 + z_2)}{\underline{z_3}} = \frac{z_3 + z_1}{\underline{z_3}}.$$

Závěr – zobecnění této graficko-početní metody:

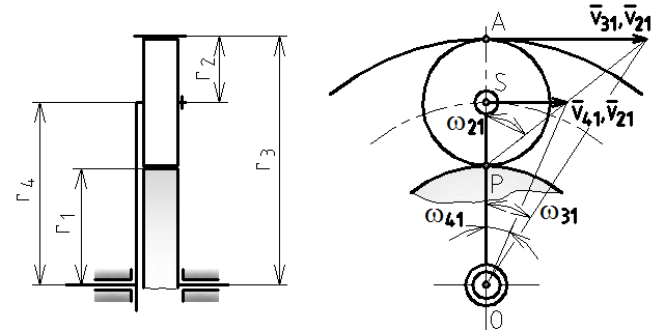
1. **V soukolí označíme body *O* – střed otáčení centrálního kola a unášeče, *S* – střed satelitu, *P* – valivý bod satelitu a nehybného kola, *A* – valivý bod satelitu a pohyblivého centrálního kola. Rychlost bodu *A* je u jednoduchého satelitu rovna dvojnásobné rychlosti bodu *S*.**
2. **Koncové body rychlostí bodů *A* a *S* spojíme se středy otáčení příslušných těles (každý bod přísluší dvěma tělesům); obdržíme tak úhly úměrné úhlovým rychlostem.**
3. **Ze vztahu mezi obvodovou a úhlovou rychlostí obdržíme vztahy pro rychlosti bodů *A*, *S*.**
4. **Poloměr unášeče vyjádříme pomocí poloměrů kol a z příslušné rovnice vyjádříme úhlovou rychlost satelitu.**
5. **Rovnici upravíme do tvaru převodového poměru.**

Příklad:

Předchozí úlohu řešte pro uspořádání s nehybným vnitřním centrálním kolem a pro parametry: určete otáčky korunového kola n_3 = ?, $z_1 = 30$, $z_2 = 30$, $z_3 = 90$ a otáčky unášeče $n_4 = 2\ s^{-1}$. Unášeč je hnací člen. Rozhodněte, zda se jedná o převod do pomala nebo do rychla.

[1] $r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}m \cdot z$, kde m je modul ozubení.

Řešení:



Nalezneme body popsané v předchozí stati a zavedeme příslušné rychlosti.

V bodě *S*:
$v_{21} = v_{41}, tedy \;\; r_2 \cdot \omega_{21} = r_4 \cdot \omega_{41}.$

V bodě *A*:
$v_{31} = v_{21}, tedy \;\; r_3 \cdot \omega_{31} = 2r_2 \cdot \omega_{21}.$

Obr. 99

$$\omega_{21} = \omega_{31} \cdot \frac{r_3}{2r_2}, \quad r_4 = r_3 - r_2, \quad r_2 \cdot \omega_{31} \cdot \frac{r_3}{2r_2} = (r_3 - r_2) \cdot \omega_{41},$$

$$i_{4,3} = \frac{n_4}{n_3} = \frac{r_3}{2(r_3 - r_2)} \Rightarrow n_3 = n_4 \cdot \frac{2(r_3 - r_2)}{r_3} = n_4 \cdot \frac{2(z_3 - z_2)}{z_3} = 2 \cdot \frac{2(90 - 30)}{90},$$

$n_4 = \underline{1{,}333\ (s^{-1})}$. Jedná se o převod do rychla.

Metoda záměny mechanismu (Willisova)

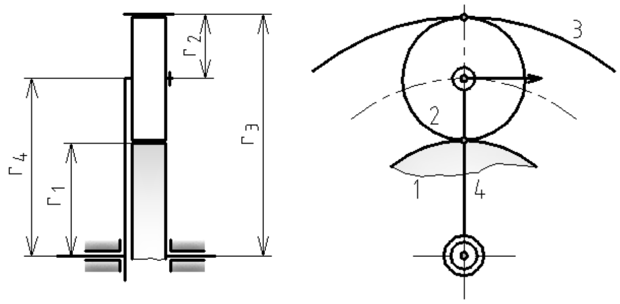
Metoda záměny mechanismu představuje praktické a rychlé řešení převodového poměru planetového převodu. Vychází z představy, že planetové soukolí v první fázi řešení nahradíme soukolím předlohovým – vzhledem k pozorovateli zastavíme unášeč (tj. k rychlostem vyšetřovaných těles přičteme opačné rychlosti vztažného tělesa, tedy unášeče).

Postup:

1. **„Zastavíme“ unášeč a sestavíme rovnici převodového poměru mezi centrálními koly; zastavení unášeče vyjádříme odečtením úhlové rychlosti unášeče od všech úhlových rychlostí.**
2. **Poměr počtů zubů vnějších soukolí doplníme znaménkem minus (změna smyslu otáčení).**
3. **Otáčky nehybného kola položíme rovny 0.**
4. **Řešíme hledaný převodový poměr.**

Příklad:

Vypočítejte převodový poměr mezi otáčkami unášeče a centrálního kola 3.



Řešení:

Zastavení unášeče:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{11}} = \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_1}{z_2}.$$

Odečtení úhlové rychlosti unášeče a doplnění znaménka minus:

Obr. 100

$$\frac{\omega_{31}-\omega_{41}}{\omega_{11}-\omega_{41}}=\frac{z_2}{z_3}\cdot\left(-\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Úhlovou rychlost kola 1 položíme rovnu 0 a rovnici řešíme:

$$\frac{\omega_{31}-\omega_{41}}{0-\omega_{41}}=\frac{z_2}{z_3}\cdot\left(-\frac{z_1}{z_2}\right), \text{po úpravě } \frac{\omega_{31}-\omega_{41}}{-\omega_{41}}=\left(-\frac{z_1}{z_3}\right).$$

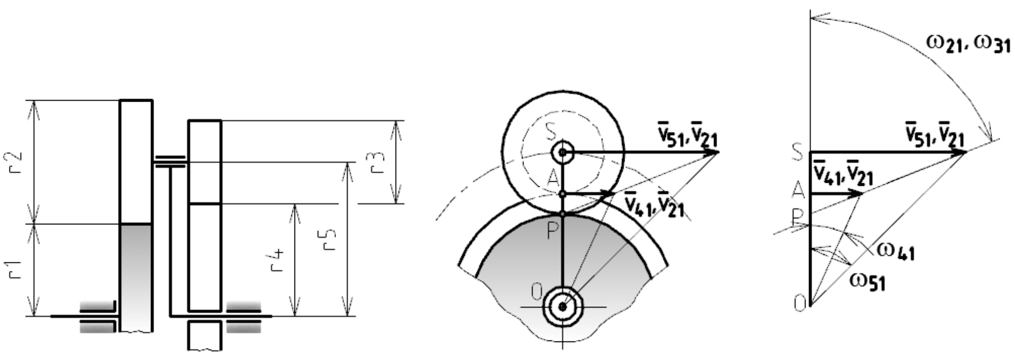
$$\omega_{31}-\omega_{41}=\omega_{41}\frac{z_1}{z_3};\ \frac{\omega_{41}}{\omega_{31}}=1+\frac{z_1}{z_3},$$

Převodový poměr mezi unášečem a centrálním kolem je dán vztahem

$$\underline{i_{4,1}=\frac{\omega_{41}}{\omega_{31}}=\frac{n_4}{n_3}=\frac{z_3+z_1}{z_3}.}$$

Příklad:
Sestavte rovnici pro převodový poměr $i_{5,4}$ planetového převodu s dvojitým satelitem.

Řeše



Obr. 101

V bodě *S*:
$v_{21}=v_{51}, tedy\ r_2\cdot\omega_{21}=r_5\cdot\omega_{51}.$

V bodě *A*:
$v_{41}=v_{21}, tedy\ r_4\cdot\omega_{41}=(r_2-r_3)\cdot\omega_{21}.$

Vyjádříme úhlovou rychlost satelitu a poloměr unášeče:

$$\omega_{21}=\omega_{51}\frac{r_5}{r_2}, r_5=r_1+r_2, tedy\ \omega_{21}=\omega_{51}\frac{r_1+r_2}{r_2}.$$

Z druhé rovnice (pro bod *A*):

$$r_4\cdot\omega_{41}=(r_2-r_3)\cdot\omega_{51}\frac{r_1+r_2}{r_2},$$

Převodový poměr:

$$i_{5,4} = \frac{\omega_{51}}{\omega_{41}} = \frac{r_2 r_4}{(r_2 - r_3) \cdot (r_1 + r_2)} = \frac{z_2 z_4}{(z_2 - z_3) \cdot (z_1 + z_2)}.$$

Metoda záměny mechanismu:

$$\frac{\omega_{41} - \omega_{51}}{\omega_{11} - \omega_{51}} = -\frac{z_3}{z_4} \cdot \left(-\frac{z_1}{z_2}\right), kde\ \omega_{11} = 0.$$

Z rovnice

$$\frac{\omega_{41} - \omega_{51}}{-\omega_{51}} = \frac{z_3}{z_4} \cdot \frac{z_1}{z_2}$$

plyne

$$\omega_{41} = \omega_{51} \left(1 - \frac{z_3}{z_4} \cdot \frac{z_1}{z_2}\right) = \omega_{51} \left(\frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{z_2 z_4}\right),$$

$$i_{5,4} = \frac{\omega_{51}}{\omega_{41}} = \frac{z_2 z_4}{z_2 z_4 - z_1 z_3}.$$

Výsledky obou výpočtů jsou shodné, můžeme se přesvědčit další úpravou prvně odvozeného vztahu:

$$i_{5,4} = \frac{z_2 z_4}{(z_2 - z_3) \cdot (z_1 + z_2)} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_2 - z_2 z_3} = \frac{z_2 z_4}{z_2 (z_1 + z_2 - z_3) - z_1 z_3} =$$

$$= \frac{z_2 z_4}{z_2 z_4 - z_1 z_3}.$$

Úkoly a otázky:

1. Popište pohyb satelitu, označte okamžitý střed otáčení.
2. Vyjmenujte části planetové převodovky, uveďte výhody planetových převodovek.
3. Které členy u planetové převodovky mohou být hnací a hnané?
4. Jakým způsobem by bylo možno u převodu z posledního příkladu dosáhnout změny smyslu otáčení?
5. Jak jinak by bylo možno u tohoto převodu vyjádřit poloměr unášeče? Proveďte číselný výpočet pro hodnoty: $z_1 = 20$, $z_2 = 30$, $z_3 = 10$, $z_4 = 40$.

12. PŘÍKLADY MECHANISMŮ PRO TRANSFORMACI POHYBU

Obsah této kapitoly:

→ *Klínové a šroubové mechanismy*

→ *Klikový mechanismus*

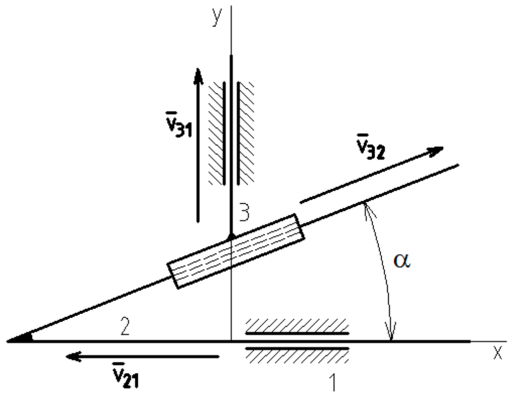
Klínové a šroubové mechanismy

Tyto mechanismy jsou založeny na principu nakloněné roviny. Klínový mechanismus je rovinný, šroubový mechanismus je představitelem prostorových mechanismů. Klínový mechanismus se používá pro transformaci pohybu v ose *x* na pohyb v ose *y* (různými rychlostmi). Šroubový mechanismus transformuje nejčastěji pohyb otáčivý v pohyb přímočarý.

Klínový mechanismus

Zajímavý výsledek obdržíme po dosazení do rovnice vazbové závislosti:

$n = 3$
$r = 0$
$p = 3$
$v = 0$
$o = 0$

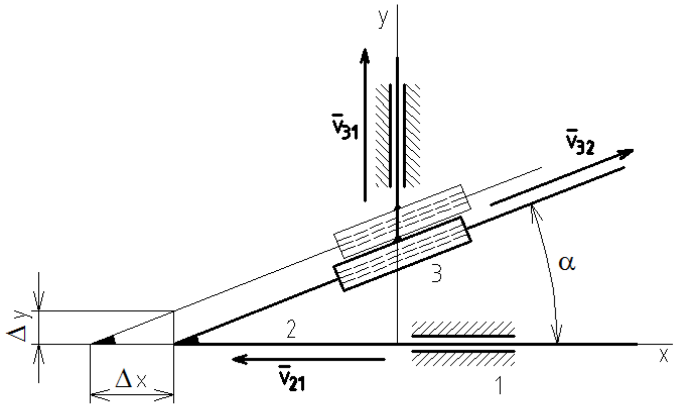


Obr. 102

$$i = 3 \cdot (n-1) - 2 \cdot (r+p+v) - o = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 = \underline{0}.$$

Podle obdrženého výsledku (stupeň volnosti 0) by se mělo jednat o nepohyblivou soustavu. Nicméně mechanismus na schématu je zcela zřejmě pohyblivý. Vzhledem k výsledku jej řadíme mezi tzv. **výjimkové soustavy**. U takových soustav změnou polohy některého členu soustavu znehybníme – pokud by zde byl úhel sklonu nakloněné roviny velký, mechanismus se vzpříčí a nebude se pohybovat.

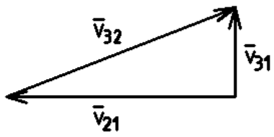
Řešení polohy, rychlosti a zrychlení zdvihátka v závislosti na rychlosti klínu:



Obr. 103

Poloha (dráha) **zdvihátka**: posune-li se klín o hodnotu Δx, posune se zdvihátko o $\Delta y = \Delta x \cdot \tan \alpha$.

Rychlost: průměrnou rychlost v časovém intervalu Δt dostaneme vydělením Δx a Δy tímto intervalem:



Obr. 104

$$v_{21} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

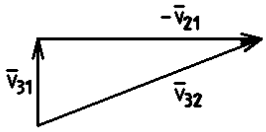
$$v_{31} = v_{21} \cdot \tan \alpha.$$

Připomínáme, že index 21 znamená, že se jedná o rychlost členu 2 vzhledem k členu 1 apod.

Zrychlení: stejný vztah jako mezi rychlostmi je i mezi zrychleními:

$$a_{31} = a_{21} \cdot \tan \alpha.$$

Přeponou trojúhelníků drah, rychlostí a zrychlení je příslušná veličina popisující relativní pohyb pohybujícího se zdvihátka vzhledem k pohybujícímu se klínu (s_{32}, v_{32}, a_{32}). Např. vektor relativní rychlosti je výsledkem **rozdílu** vektorů rychlosti klínu a zdvihátka. Stejný výsledek obdržíme, když k rychlosti vyšetřovaného zdvihátka **přičteme opačnou rychlost** klínu (vztažné těleso).



Obr. 105

Obecně platí: relativní rychlost obdržíme, když k rychlosti vyšetřovaného tělesa přičteme opačnou rychlost vztažného tělesa.

Jedeme-li autem kolem lesa, zdá se nám, že les se pohybuje směrem vzad. Relativní rychlost lesa vzhledem k autu obdržíme, když k rychlosti lesa (nulová) přičteme opačnou rychlost vztažného tělesa (automobil).

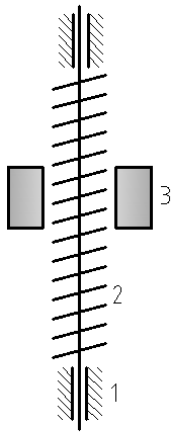
Šroubový mechanismus

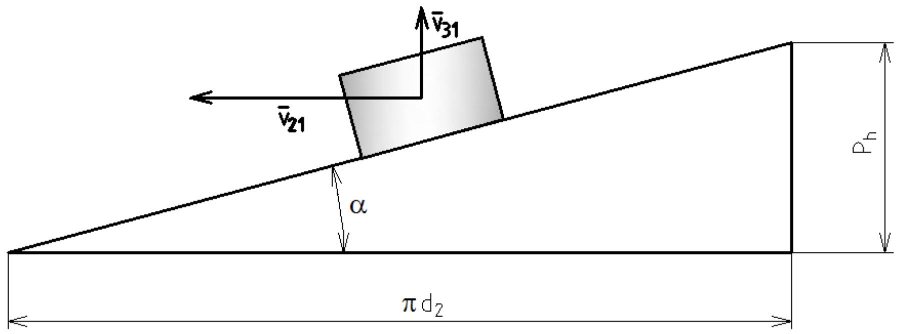
Obr. 106

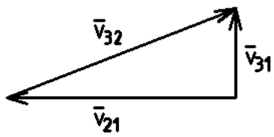
Hlavními částmi šroubového mechanismu jsou pohybový šroub a matice. Pohyb otáčivý je transformován na pohyb posuvný následujícími způsoby:
a) šroub se otáčí i posouvá (např. vřetenový lis, viz obr.);
b) matice se otáčí i posouvá (např. upínka);
c) šroub se otáčí, matice se posouvá (vodicí šroub soustruhu);
d) šroub se posouvá, matice se otáčí (např. protahovačka).

Základem závitu je nakloněná rovina, takže skládání rychlostí (a zrychlení) je obdobné jako u klínového mechanismu.

P_h – stoupání, d_2 – střední průměr závitu, α – úhel stoupání.







Obr. 107
Obr. 108
Obr. 109

Z trojúhelníku rychlostí vyjádříme:

$$v_{31} = v_{21} \cdot \tan \alpha.$$

Rychlost v_{21} je obvodovou rychlostí na středním průměru závitu šroubu (n jsou otáčky šroubu):

$$v_{31} = \pi \cdot d_2 \cdot n \cdot \tan \alpha.$$

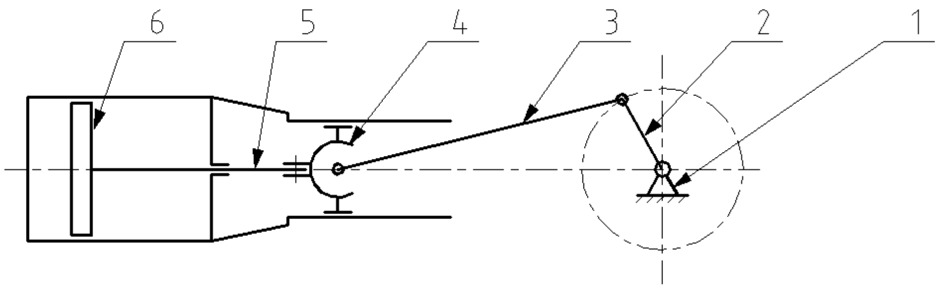
V této rovnici výraz $\pi \cdot d_2 \cdot \tan \alpha$ představuje stoupání P_h:

$$\underline{v_{31} = P_h \cdot n.}$$

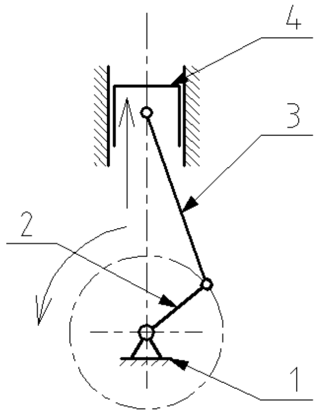
Klikový mechanismus

Klikový mechanismus je mechanismem, bez něhož si stále nedovedeme představit pístové stroje. Slouží buď pro transformaci pohybu přímočarého vratného na rotační (spalovací motory), nebo pro transformaci pohybu rotačního na přímočarý vratný (čerpadla a kompresory). U větších ležatých pomaloběžných strojů se používá klikový mechanismus s křižákem, častěji se však setkáme se zkráceným klikovým mechanismem, typickým pro stroje rychloběžné.

Obr. 110



Obr. 111
Jednotlivé členy klikového mechanismu s křižákem:
1 – základní rám; 2 – klika; 3 – ojnice; 4 – křižák; 5 – pístní tyč (pístnice); 6 – píst.



Členy zkráceného klikového mechanismu:
1 – základní rám;
2 – klika (klikový hřídel);
3 – ojnice;
4 – píst.

Kinematické řešení spočívá v určení závislosti dráhy, okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení pístu nebo křižáku na poloze a otáčkách kliky.

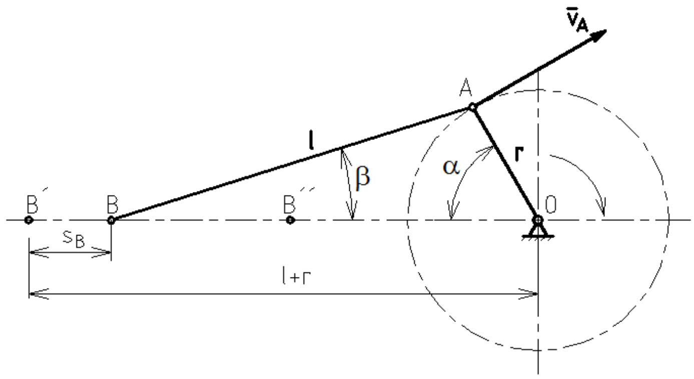
Obr. 112

Řešení dráhy pístu
Zavedeme: *L* – zdvih (mm), *L* = 2*r*; poměr $\lambda = r/l$ (délka kliky ku délce ojnice).
Úhel $\alpha = \omega \cdot t$ (úhlová dráha při rovnoměrné rotaci kliky)[1].

$$s_B = (r + l) - (r \cdot \cos\alpha + l \cdot \cos\beta).$$

Pro praktické výpočty se používá přibližný vztah, v němž se nevyskytuje úhel β:

$$s_B \doteq r \cdot \left(1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2\alpha\right).$$



Obr. 113

Řešení rychlosti pístu:
Uvedeme pouze prakticky používaný přibližný vztah:

$$v_B \doteq v_A\left(\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha\right).$$

Důležitým porovnávacím parametrem pístových strojů je tzv. **střední pístová rychlost**, která odpovídá hodnotě rychlosti, jíž by se píst pohyboval rovnoměrně přímočaře:

[1] Úhel udáváme v dalším textu od horní úvratě.

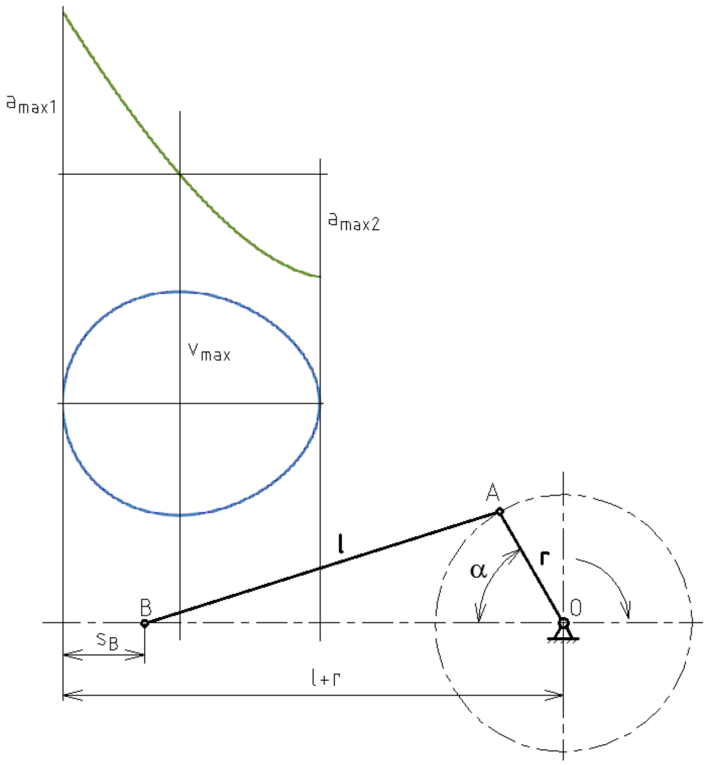
$$c_s = 2 \cdot L \cdot n.$$

Největší rychlost má píst v poloze, kdy je klika kolmá na ojnici, rychlost v úvratích (krajní polohy pístu) je nulová.

Řešení zrychlení pístu:
Okamžitá hodnota zrychlení je dána vztahem:

$$a_B = \frac{v_A^2}{r} \cdot (\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha).$$

Největší hodnoty zrychlení jsou v úvratích, kdy píst musí nabýt z klidu velké rychlosti, nulová hodnota zrychlení je v poloze, kdy rychlost pístu má největší velikost.



Maximální zrychlení mají různou hodnotu a opačný smysl, graf rychlosti pro opačný smysl pohybu pístu symetricky leží v opačné polorovině.

Obr. 114

Otázky a úkoly:
1. Vysvětlete souvislost mezi klínovým a šroubovým mechanismem.
2. Vyhledejte další mechanismy pro transformaci pohybu, vysvětlete pohyby členů a uveďte příklady použití.
3. Co je to střední pístová rychlost?
4. Nakreslete grafy rychlosti a zrychlení pístu klikového mechanismu.
5. Objasněte, proč musí mít písty nízkou hmotnost.
6. Proč jsou u klikového hřídele zalomení vzájemně pootočena?
7. Jaký typ šroubového mechanismu je u svěráku?
8. Naznačte určení relativní rychlosti dvou automobilů, které se míjejí na mimoúrovňovém křížení pod úhlem 90°.

13. POUŽITÁ LITERATURA

HIBBELER, R. C. *Engineering Mechanics. Dynamics.* Tenth Edition. Published by Pearson Education, Inc. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, USA.

KUNC, A. aj. *Mechanika III. Hydromechanika, termomechanika, kinematika a dynamika těles.* Praha : SNTL, 1961.

OUWEHAND, J., DROST, A. *Werktuigbouwkunde voor het MTO. Mechanica.* The Hague, The Netherlands : by B. V. Uitgeverij Nijgh & Van Ditmar, 1984.

SZABÓ, I. *Mechanika tuhých těles a kapalin.* Přel. C. Höschl. Praha : SNTL, 1967.

TUREK, I. aj. *Sbírka úloh z mechaniky*. Praha : SNTL, 1975.

WANNER, J. *Sbírka vyřešených úloh z technické mechaniky. III. díl, dynamika a kinematika.* Praha : Československý kompas, 1949.